N° d'ordre:

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Michel TREHEL

BORNES DANS UN ENSEMBLE ORDONNE FINI. PRODUIT CONTRACTE. APPLICATIONS.

Thèse soutenue le 20 mai 1972 devant la Commission d'Examen:

Messieurs	J. KUNTZMANN	Président
	M. BARBUT	Invité
	B. VAUQUOIS	Examinateur
	C BENZAKEN	Examinateur

N° d'ordre:

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Michel TREHEL

BORNES DANS UN ENSEMBLE ORDONNE FINI PRODUIT CONTRACTE. APPLICATIONS.

Thèse soutenue le 20 mai 1972 devant la Commission d'Examen:

Messieurs	J. KUNTZMANN	Président
	M. BARBUT	Invité
	B. VAUQUOIS	Examinateur
	C BENZAKEN	Examinateur

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE

ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures

MM. GASTINEL Noël	Analyse numérique
GERBER Robert	Mathématiques Pures
GIRAUD Pierre	Géologie
KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM. KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
LACAZE Albert	Thermodynamique
LACHARME Jean	Biologie végétale
LATREILLE René	Chirurgie générale
LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
LEDRU Jean	Clinique médicale B
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOUP Jean	Géographie
Mle LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
MALINAS Yves	Clinique obstétricale
MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
MASSEPORT Jean	Géographie
MAZARE Yves	Clinique médicale A
MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
MOURIQUAND Claude	Histologie
MOUSSA André	Chimie nucléaire
NEEL Louis	Physique du Solide
OZENDA Paul	Botanique
PAUTHENET René	Electrotechnique
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRET René	Servomécanismes
PILLET Emile	Physique industrielle
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
REULOS René	Physique industrielle
RINALDI Renaud	Physique
ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
SANTON Lucien	Mécanique
SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
SENGEL Philippe	Zoologie
SILBERT Robert	Mécanique des fluides
SOUTIF Michel	Physique générale
TANCHE Maurice	Physiologie
TRAYNARD Philippe	Chimie générale
VAILLAND François	Zoologie
VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M. VERAIN André	Physique
Mme VEYRET Germaine	Géographie
MM. VEYRET Paul	Géographie
VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. BULLEMER Bernhard	Physique
RADHAKRISHNA Pidatala	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. AUBERT Guy	Physique
BEAUDOING André	Pédiatrie
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Appliquées
BIARES Jean-Pierre	Mécanique
BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme BONNIER Jane	Chimie générale
MM. CARLIER Georges	Biologie végétale
COHEN Joseph	Electrotechnique
COUMES André	Radioélectricité
DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Métallurgie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
GEINDRE Michel	Electroradiologie
GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
GLENAT René	Chimie organique
HACQUES Gérard	Calcul numérique
JANIN Bernard	Géographie
Mme KAHANE Josette	Physique
MM. MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
REVOL Michel	Urologie
REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
ROBERT André	Chimie papetière
SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
SIBILLE Robert	Construction Mécanique
SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme SOUTIF Jeanne	Physique générale
M. VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
ALARY Josette	Chimie analytique
MM. AMBLARD Pierre	Dermatologie
AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
ARMAND Yves	Chimie
BEGUIN Claude	Chimie organique
BELORIZKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
Mme BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM. BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM. BOUCHET Yves	Anatomie
BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
BRIERE Georges	Physique expérimentale
BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
BRUGEL Lucien	Energétique
BUISSON Roger	Physique
BUTEL Jean	Orthopédie
CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse

MM.	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GENSAC Pierre	Botanique
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie Organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle	PIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-Chirurgie
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie

MM. STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
VIALON Pierre	Géologie
VOOG Robert	Médecine interne
VROUSSOS Constantin	Radiologie
ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
CHEEKE John	Thermodynamique
GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MATIRES DE CONFERENCES

Mme BERIEL Hélène	Physiologie
Mme RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 8 MARS 1972.

Les travaux qui font l'objet de cette thèse ont été effectués dans l'équipe "Algèbre Appliquée et Conception" du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'U.E.R. "I.R.M.A.".

Monsieur KUNTZMANN, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, a dirigé l'ensemble de ces travaux. Je le remercie profondément d'une part de m'avoir aidé en m'envoyant fréquemment ses suggestions, d'autre part de m'avoir fait l'honneur de présider le Jury.

Monsieur BARBUT, Professeur à l'Université René Descartes à la Sorbonne, a bien voulu s'intéresser à mon travail, critiquer la rédaction provisoire et faire partie du Jury. Je le prie de trouver ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Monsieur VAUQUOIS, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, actuellement détaché à l'Université de Montréal, a été à l'origine de mes recherches sur les catalogues. Je le remercie vivement d'une part de m'avoir prodigué ses conseils, d'autre part d'avoir accepté d'effectuer un long voyage pour faire partie du Jury.

Monsieur BENZAKEN, Maître de Conférences à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, m'a fait profiter, à plusieurs reprises, de ses connaissances sur les treillis et m'a permis d'améliorer mon manuscrit par ses critiques constructives. Je le prie de trouver ici l'expression de ma gratitude.

Je tiens enfin à remercier Madame NEUMANN qui a dactylographié la rédaction provisoire et mes nombreuses corrections en vue de la rédaction définitive, ainsi que les membres du service reproduction qui ont mené à bien le tirage malgré de nombreux ennuis de machine.

A ma femme

TABLE DES MATIERES

pages

INTRODUCTION 1

PREMIERE PARTIE. BORNES SUPERIEURES ET INFERIEURES GENERALISEES 3

CHAPITRE I - DEFINITION DES BORNES SUPERIEURES ET INFERIEURES GENERALISEES 3

A - Rappels 4
B - Parties remarquables d'un ensemble ordonné 5
C - Multitreillis 6
D - Immersion dans l'ensemble des semi-idéaux 9
E - Immersion dans un ensemble ordonné d'interpolation 12
F - Multitreillis associatifs 13
G - Multiarborescences 16

CHAPITRE II - MULTITREILLIS SEMI-MODULAIRES, MODULAIRES, DISTRIBUTIFS 21

A - Rappels 22
B - Multitreillis très connexes 28
C - Contribution à l'étude des multitreillis semi-modulaires 33
D - Contribution à l'étude des multitreillis modulaires ... 44
E - Contribution à l'étude des multitreillis distributifs . 51

CHAPITRE III - MULTITREILLIS PSEUDO-COMPLEMENTES 58

A - Multitreillis pseudo-complémentés inférieurement 59
B - Cas particulier : le pseudo-treillis distributif 67

CHAPITRE IV - MULTITREILLIS COMPLEMENTES 77

A - Multitreillis complémentés 78
B - Modulaires et distributifs complémentés 95

DEUXIEME PARTIE. PRODUIT CONTRACTE 99

CHAPITRE I - DEFINITION DU PRODUIT CONTRACTE 99

A - Produit contracté 100

B - Graphe des compléments 104
C - Classes de branches et treillis simples 107
D - Incompatibilité du produit direct et du produit contracté 109
E - Factorisation unique pour le produit direct 114

CHAPITRE II - TREILLIS FORMES PAR PRODUIT DIRECT ET PRODUIT CONTRACTE A PARTIR DE 2^1 121

A - Définitions et premières propriétés 122
B - Complémentation 123
C - Classes de branches 127
D - Cycles du diagramme de Hasse d'un treillis CD 128
E - Décomposition des treillis CD 131
F - Applications des treillis CD 133

TROISIEME PARTIE. CATALOGUES 136
INTRODUCTION A LA TROISIEME PARTIE 137

CHAPITRE I - DEFINITION DES CATALOGUES 144

A - Catalogues, union et intersection 145
B - Génération des treillis de catalogues 147
C - Décomposition unique et cartes équivalentes 151
D - Treillis de catalogues de même espèce 153

CHAPITRE II - RESTRUCTURATION DES CATALOGUES 155

A - Définition de la restructuration 156
B - Caractérisation des restructurations 0-stationnaires 158
C - Restructurations 1-stationnaires 162

CHAPITRE III - MINIMISATION DE LA PLACE OCCUPEE PAR UN CATALOGUE A CARTE LINEAIRE 168

A - Problème posé 169
B - Résolution par approximation 171
C - Vérification expérimentale 177

TABLE DES SIGNES, DES ABREVIATIONS ET DEFINITIONS I

BIBLIOGRAPHIE V

INTRODUCTION GENERALE

Bien que ce travail ait été abordé par l'étude des catalogues, il est présenté en commençant par l'examen de diverses classes d'ensembles ordonnés qui sont apparues en les étudiant.

Ainsi l'opération de produit contracté qui intervient dans la génération des treillis de catalogues a été examinée indépendamment de ceux-ci. Il s'est avéré très vite que cette opération pouvait s'effectuer entre des ensembles ordonnés quelconques munis d'un élément nul, et non seulement entre treillis. Les particularités concernant les classes de branches dans un ensemble ordonné incitaient à s'intéresser aux ensembles ordonnés semi-modulaires. Les particularités concernant les compléments incitaient à s'intéresser aux ensembles ordonnés complémentés.

Il y a déjà une vingtaine d'années que sont parus les premiers articles de M. Benado. Il y remarque que certaines propriétés de treillis semi-modulaires ou modulaires ne sont pas dûes à la structure de treillis. Partant de là, il définit des ensembles ordonnés qu'il appelle multitreillis et examine successivement la semi-modularité, la modularité, la distributivité.

La première partie est une contribution à l'étude des multitreillis. On donne d'abord des propriétés d'immersion et on caractérise les multitreillis qui sont associatifs pour les opérations de borne supérieure et inférieure. On introduit ensuite la notion de très connexité, intermédiaire entre les notions de graduation et de semi-modularité. De nouvelles propriétés sont alors données concernant la semi-modularité, la modularité, la distributivité.
Peu de travaux avaient jusqu'alors été réalisés sur les ensembles ordonnés complémentés. Cette thèse présente la généralisation aux ensembles ordonnés des différentes formes de complémentation habituellement définies dans les treillis et introduit de nouvelles formes propres aux multitreillis.
Cette étude n'est pas systématique : elle laisse de côté les multitreillis qui se situent trop en dehors de la hiérarchie classique des définitions : semi-modulaires, modulaires, distributifs, puis distributifs-complémentés ou qui n'ont pas d'interprétation connue.

Ainsi on s'attarde sur les pseudo-treillis distributifs autant parce que ce sont des cas particuliers très riches de multitreillis pseudo-complémentés, qu'à cause de leur utilisation à propos du cheminement dans les graphes.

L'objet de la seconde partie est l'étude du produit contracté. Cette opération n'avait pas été définie jusqu'alors, à notre connaissance. On examine ensuite les treillis dérivés du treillis de Boole à 2 éléments par applications successives du produit direct et du produit contracté. Il est donné diverses démonstrations de l'unicité de la génération de ces treillis qui débouchent sur un algorithme de décomposition. Cette étude est à peu de choses près l'étude des treillis de catalogues indépendamment des catalogues.

L'objet de la troisième partie est d'examiner la structure de ce type de fichiers arborescents et des propriétés qui en découlent. Les opérations qui consistent à réunir les informations ou à capter ce qui est commun à deux catalogues correspondent à l'union et l'intersection de la théorie des treillis. Un chapitre est consacré aux restructurations. Ces opérations sont destinées à changer l'ordre des informations. On caractérisera alors entre autres les restructurations injectives et les surjectives.

Un problème de recherche opérationnelle à propos des catalogues a été examiné. Il en est rendu compte dans un dernier chapitre.

Les catalogues étant des objets finis, ces trois parties, malgré diverses généralisations, sont restées dans le cadre des ordonnés finis.

Afin de ne pas créer un chapitre supplémentaire de rappels, qui serait obligatoirement assez dispersé, les notions préalables nécessaires seront exposées lors de leur première utilisation. Quand un théorème connu sera énoncé ou présenté différemment, ce sera soit inclus dans un paragraphe de rappels, soit précisé dans les lignes qui précèderont l'énoncé. Une table des signes, abréviations et définitions permettra au lecteur de trouver la page où ces notions sont introduites.

Les références à une propriété seront données en indiquant successivement le numéro de la partie, le numéro du chapitre en chiffres romains, la lettre du paragraphe et le numéro de la propriété, par exemple : 1 II A 26, sauf s'il n'y a pas changement de partie, auquel cas le premier numéro est superflu, ou même, pas de changement de chapitre, auquel cas le second numéro est aussi superflu. Les figures seront numérotées par chapitre et non par paragraphe comme les propriétés.

PREMIERE PARTIE

BORNES SUPERIEURES ET INFERIEURES GENERALISEES

CHAPITRE I

Définition des bornes supérieures et inférieures généralisées

A) RAPPELS

Tous les ensembles ordonnés dont il est question ici sont finis.

Nous allons considérer, suivant J. Kuntzmann [2], pour un ensemble ordonné :

Propriété M_I : Toute partie d'au plus I éléments possède un majorant.

Propriété B_J : Toute partie d'au plus J éléments qui possèdent un majorant possède une borne supérieure.

Un ensemble ordonné possédant ces propriétés se nomme: V-demi-treillis (I, J).

On définit par dualité un Λ-demi-treillis (I', J').
Puisqu'on travaille uniquement dans le cas fini, il n'y a, pour I, I', J, J', qu'à considérer les valeurs 1 et 2.
Si un ensemble ordonné est un V-demi-treillis (I, 2) et un Λ-demi-treillis (I', 1), c'est aussi un Λ-demi-treillis (I', 2).

Ceci signifie que si deux éléments qui possèdent un majorant ont une borne supérieure, deux éléments qui possèdent un minorant ont nécessairement une borne inférieure.
On a bien sûr la remarque duale.

Finalement un ensemble ordonné qui sera un V-demi-treillis (I, J) et un Λ-demi-treillis (I', J) sera dit (I, I', J).

Ainsi la donnée de I, I', J permet de savoir immédiatement si l'ensemble ordonné a un élément nul, un élément universel, est un V-demi-treillis, un Λ-demi-treillis. Toutefois nous utiliserons un vocabulaire approprié à chaque cas.

(1, 1, 1)	ensemble ordonné.
(1, 1, 2)	G. Birkhoff parle à leur propos d'ensemble ordonné possédant la propriété d'interpolation. Il nous arrivera d'utiliser le sigle EOI : ensemble ordonné d'interpolation.
(1, 2, 1)	ensemble ordonné muni d'un élément nul 0 ou plus simplement ensemble ordonné avec 0.
(1, 2, 2)	EOI avec 0 ou Λ-demi-treillis.
(2, 1, 1)	ensemble ordonné avec 1.
(2, 1, 2)	EOI avec 1 ou V-demi-treillis.
(2, 2, 1)	ensemble ordonné avec 0 et 1.
(2, 2, 2)	treillis.

B) PARTIES REMARQUABLES D'UN ENSEMBLE ORDONNE

E étant une partie d'un ensemble ordonné S fini, on note :

$\text{maj}(E) = \{x \mid x \geq y, \text{ tout } y \in E\}$

$\text{min}(E) = \{x \mid x \leq y, \text{ tout } y \in E\}$

$M(E) = \{x \mid x \in E, \nexists\, y \in E : y > x\}$

$m(E) = \{x \mid x \in E, \nexists\, y \in E : y < x\}$

S étant fini, chacune de ces parties existe.

On admettra que $m(\emptyset) = M(\emptyset) = \emptyset$.

Réservons dans la suite de ce chapitre les lettres minuscules pour les éléments de S, les majuscules pour des parties.

Relations entre les parties

$A \perp B$ signifie : $\forall a \in A \ \exists b \in B : a \leq b$

$A \top B$ " : $\forall b \in B \ \exists a \in A : a \leq b$

$A \perp\!\!\!\perp B$ " : $A \top B$ et $A \perp B$

$A \leq B$ " : $\forall a \in A$ et $\forall b \in B : a \leq b$

Ecrivons les propriétés de ces relations qui seront utiles dans la suite.

B1) $\leq$ est une relation d'ordre strict.

B2) $\perp$ et $\top$ sont des préordres.

B3) Rappelons qu'une partie libre est une partie A telle que $m(A) = A$ (ou $M(A) = A$). On étudie au paragraphe suivant la structure formée par les parties libres.

$\perp$ et $\top$ sont des relations d'ordre dans la famille des parties libres de S.

C) MULTITREILLIS

Rappelons la définition donnée par M. Benado [7] d'un multitreillis.

Soit S un ensemble partiellement ordonné. On dit que S est un multitreillis quand on a les axiomes suivants :

m_1 : soient a, b $\in$ S. S'il existe $\gamma \in S$ tel que $\gamma \geq a$, $\gamma \geq b$, alors il existe $e \in S$ tel que $e \leq \gamma$, $e \geq a$, $e \geq b$ et tel que les conditions $x \leq e$, $x \geq a$, $x \geq b$ entraînent $x = e$. On désigne par aVb l'ensemble de tels e.

m_2 : soient a, b $\in$ S. S'il existe $z \in S$ tel que $z \leq a$, $z \leq b$, alors il existe $d \in S$ tel que $d \geq z$, $d \leq a$, $d \leq b$ et tel que les conditions $y \geq d$, $y \leq a$, $y \leq b$ entraînent $y = d$. On désigne par a$\wedge$b l'ensemble de tels d.

Ainsi si aVb existe, c'est l'ensemble des éléments minimaux des majorants communs à a et b.

De même si a$\wedge$b existe, c'est l'ensemble des éléments maximaux des minorants communs à a et b.

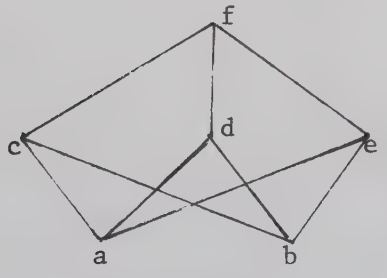
Tout ensemble ordonné fini est un multitreillis.

Avec les notations de B) on peut écrire :

aVb = m(maj({a, b}))

a$\wedge$b = M(min({a, b}))

Exemple



aVb = {c, d, e}
c$\wedge$d = {a, b}
c$\wedge$e = {a, b}
d$\wedge$e = {a, b}

Figure 1

On peut généraliser ces opérations à des parties. Il y a plusieurs définitions possibles de AVB et AΛB. Donnons celle de M. Benado qui rend les opérations Λ, V non associatives et cherchons à partir de là une définition plus intéressante.

1) Définition de M. Benado

$$AVB = \bigcup_{\substack{a\in A \\ b\in B}} aVb \qquad A\Lambda B = \bigcup_{\substack{a\in A \\ b\in B}} a\Lambda b$$

Ainsi on peut avoir $(aVb)Vc \neq aV(bVc)$ et $(a\Lambda b)\Lambda c \neq a\Lambda(b\Lambda c)$.
Nous donnerons au paragraphe F une condition pour qu'il y ait associativité.

Ainsi dans la figure 1

$(aVb)\ V\ c = \{c, f\}$

$bVc = \{c\}$

$a\ V\ (bVc) = \{c\}$

2) On écrit :

$$AVB = m\left(\bigcup_{\substack{a\in A \\ b\in B}} aVb\right) \qquad A\Lambda B = M\left(\bigcup_{\substack{a\in A \\ b\in B}} a\Lambda b\right)$$

Introduisons aussi les définitions

$Sup(A) = m(maj(A))$

$Inf(A) = M(min(A))$

Propriétés immédiates

C1) $(aVb)Vc = aV(bVc) = Sup(\{a, b, c\})$

Démonstration

$maj(\{a, b, c\}) = \underset{x\in aVb}{U} maj(\{x, c\}) = \underset{y\in bVc}{U} maj(\{a, y\})$

$m(AUB) = m(m(A) \cup m(B))$ donc en appliquant l'opérateur m, il vient :

$$m(maj(\{a, b, c\})) = m\Big(\underset{x\in aVb}{U} m(maj(\{x, c\}))\Big) = m\Big(\underset{y\in bVc}{U} m(maj(\{a, y\}))\Big)$$

ce qui s'écrit :

$m(maj(\{a, b, c\})) = (aVb)Vc = aV(bVc)$.

Dans la suite on utilisera la notation aVbVc et plus généralement $a_1Va_2Va_3\ldots Va_n$ qui est $Sup(\{a_1, a_2, \ldots a_n\})$

Par dualité on a aussi $a_1\Lambda a_2\Lambda a_3\ldots \Lambda a_n = Inf(\{a_1, a_2, \ldots a_n\})$.

C2) Si $a \leq b$ alors $aVb = \{b\}$ et $a\Lambda b = \{a\}$.

C3) Si $A \leq B$, alors $A \perp inf(B)$ et $Sup(A)$ T B.

Les 2 propriétés suivantes sont des conséquences immédiates

$A \perp a$ et $A \perp b$ impliquent $A \perp a\Lambda b$

a T B et b T B impliquent aVb T B

C4) $Sup(Inf(Sup(A))) = Sup(A)$

$Inf(Sup(Inf(A))) = Inf(A)$

Démonstration

- $Inf(Sup(A)) \leq Sup(A)$ donc par C3, $Sup(Inf(Sup(A)))$ T $Sup(A)$
- $A \leq Sup(A)$ donc par C3, $A \perp Inf(Sup(A))$.

Donc $A \leq Sup(Inf(Sup(A)))$ et par C3,

$Sup(A)$ T $Sup(Inf(Sup(A)))$.

La relation T étant une relation d'ordre pour les parties libres, on obtient une des formules annoncées. L'autre s'obtient par dualité.

Remarque : Les éléments de Sup(A) et Inf(A) seront respectivement appelés bornes supérieures et bornes inférieures de A par abus de langage. Les termes union et intersection seront réservés aux EOI.

D) IMMERSION DANS L'ENSEMBLE DES SEMI-IDEAUX

A. Bouchet [9] définit une immersion d'un ensemble ordonné A dans un ensemble ordonné B comme une application injective h de A dans B telle que A soit isomorphe à **h(A)** muni de l'ordre induit à partir de B.
On trouve cette immersion dans l'ensemble des semi-idéaux, en outre dans l'ouvrage de G. Birkhoff [4].

Une partie A de l'ensemble ordonné E est un semi-idéal inférieur si pour tout $x \in A$, $y \leq x$ implique $y \in A$. Un semi-idéal supérieur est défini de manière duale.

Soit L_E (U_E) la collection des semi-idéaux inférieurs (supérieurs) de E ordonnés par inclusion. L_E et U_E sont des treillis distributifs.
On définit les applications suivantes :

α : de L_E dans U_E $\quad \alpha(A) = \complement A$ où $\complement$ désigne le complémentaire par rapport à E.

ω : de U_E dans L_E $\quad \omega(A) = \complement A$

J.C. Derderian [12] montre que U_E est anti-isomorphe à L_E :

$\alpha(L_E) = U_E$ $\quad \omega(U_E) = L_E$ et α et ω sont une paire de connexions de Galois.

Approche par les parties libres

On peut représenter un semi-idéal inférieur par la partie libre de ses éléments maximaux et un semi-idéal supérieur par la partie libre de ses éléments minimaux.

On a alors :

i) Soient $A, B \in L_E$

$A \subseteq B \longleftrightarrow M(A) \perp M(B)$

L_E est isomorphe à l'ensemble des parties libres de E ordonnées par $\perp$.

ii) Soient $A, B \in U_E$

$A \subseteq B \longleftrightarrow m(B)\ T\ m(A)$

U_E est anti-isomorphe à l'ensemble des parties libres de E ordonnées par T.

Représentons dans un exemple le treillis des parties libres pour les deux relations d'ordre $\perp$ et T.

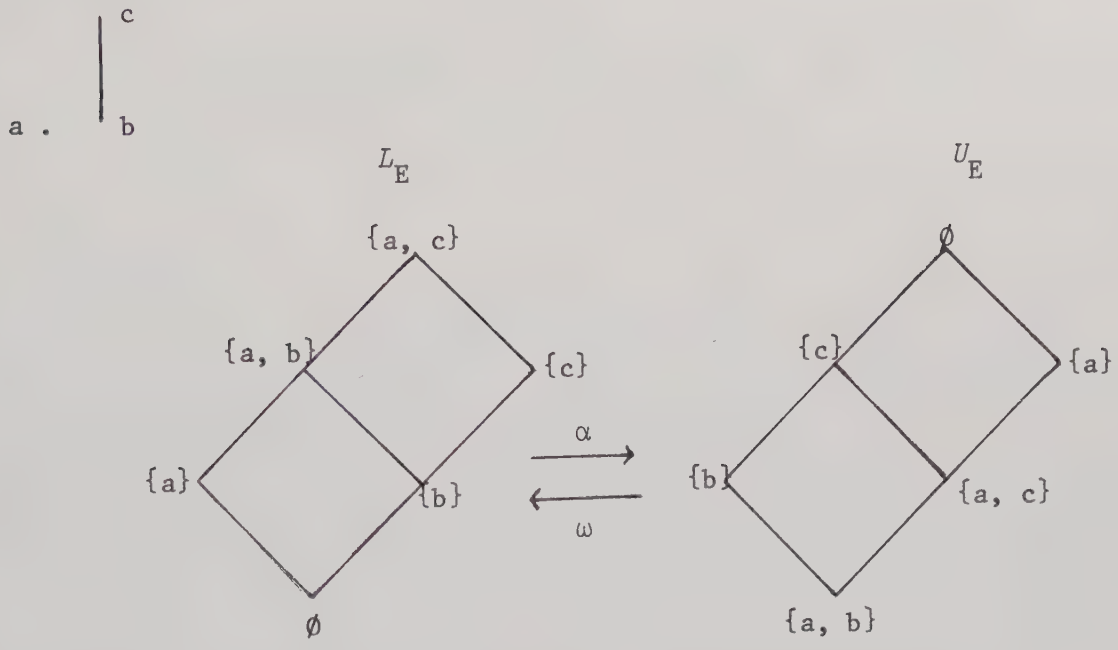


Figure 2

Pour une partie libre X non vide, on note I_X le semi-idéal inférieur tel que $M(I_X) = X$ et P_X le semi-idéal supérieur tel que $m(P_X) = X$, et quand X est réduit à un seul élément a, on note I_a, P_a, au lieu de $I_{\{a\}}$, $P_{\{a\}}$. Si $a \leq b$, $[a, b]$ sera $P_a \cap I_b$ et sera appelé pour simplifier intervalle au lieu de intervalle fermé.

On a alors la propriété d'échange. Cette propriété n'a rien à voir avec la propriété d'échange qu'on trouve dans l'ouvrage de M. Barbut et B. Monjardet [1].

Propriété d'échange

X, Y, R, S étant des parties libres de E

$$\begin{cases} Y \perp X \\ R = X \vee Y \text{ dans } U_E \\ S = X \wedge Y \text{ dans } U_E \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} R \; T \; S \\ X = R \vee S \text{ dans } L_E \\ Y = R \wedge S \text{ dans } L_E \end{cases}$$

Démonstration

A cause de la dualité, il suffira de faire la démonstration dans un sens.

Supposons donc qu'on ait $\begin{cases} Y \perp X \\ R = X \vee Y \text{ dans } U_E \\ S = X \wedge Y \text{ dans } U_E \end{cases}$

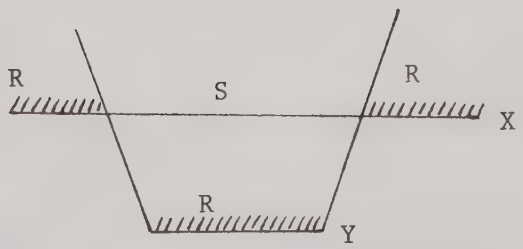


Figure 3

R est donc composé de Y plus les éléments de X qui ne majorent pas d'éléments de Y. S est composé des éléments de X qui majorent les éléments de Y.

- Il est clair que R T S.

- Par ailleurs X est composé des éléments qui ne majorent pas d'éléments de Y, soit des éléments de $R \cap X$ et des éléments qui majorent des éléments de Y, soit des éléments de $S \cap X$ donc $X = R \vee S$ dans L_E.

- Enfin les éléments qui minorent en même temps des éléments de R et des éléments de S ont Y comme ensemble d'éléments maximaux donc $Y = R \wedge S$ dans L_E.

Remarques

1) La situation d'échange se présente par exemple dans la figure 1 avec $Y = \{b\}$, $X = \{a, c\}$, $R = \{a, b\}$, $S = \{c\}$

2) Si $Y \subseteq X$, alors $R = X$, $S = Y$
Si $Y \perp\!\!\!\perp X$, alors $R = Y$, $S = X$.

E) IMMERSION DANS UN ENSEMBLE ORDONNE D'INTERPOLATION

Proposition E1

Un ensemble ordonné n'est pas d'interpolation si et seulement si il existe deux parties libres distinctes A et B telles que

$$Sup(A) = B \quad et \quad Inf(B) = A$$

Démonstration

- Il est clair que s'il existe deux telles parties libres, c'est que Sup(A) a plus d'un élément (car si B a un seul élément Inf(B) = B et il y a contradiction puisque A et B sont distinctes).

- Considérons maintenant que l'ensemble ordonné n'est pas d'interpolation. Alors il existe $A_1 = \{a_o, a_1\}$ tel que $Sup(A_1) = B_1$ et card $(B_1) > 1$.

Soit $A_2 = Inf(B_1)$

D'après C4) on a donc $Sup(A_2) = B_1$ et $Inf(B_1) = A_2$

On a donc trouvé deux parties libres distinctes satisfaisant les conditions.

Le théorème qui suit n'est pas nouveau mais constitue seulement une présentation un peu différente d'une immersion bien connue.

Théorème E2

Tout ensemble ordonné S peut s'immerger dans l'ensemble ordonné d'interpolation constitué des parties libres A telles qu'il existe B avec Sup(A) = B et Inf(B) = A, ordonnées par la relation $\perp$.

Démonstration

Vérifions que cet algorithme d'immersion correspond à la fermeture polaire de Mac Neille [19] qui considère l'ensemble des parties $\overline{F}$ telles que $\emptyset \subseteq F \subseteq S$, maj(F) $\neq \emptyset$ et $\overline{F} = \min(maj(F))$.

Cet ensemble des $\overline{F}$ forme un ensemble ordonné d'interpolation qui conserve les bornes supérieures et inférieures quand elles existent.

On a alors un isomorphisme entre l'ensemble des $\overline{F}$ ordonné par inclusion et l'ensemble des $M(\overline{F}) = \inf(\sup(F))$ ordonné par $\perp$.

En effet $\overline{F} \subseteq \overline{G} \longleftrightarrow M(\overline{F}) \perp M(\overline{G})$.

D'autre part, les $M(\overline{F})$ sont bien tels que :

$Sup(M(\overline{F})) = Sup(F)$ et $M(\overline{F}) = inf(Sup(F))$ par C4.

Remarques

1) Cette immersion est naturellement plus économique que la précédente puisqu'on ne considère que certains semi-idéaux.

2) On peut tout aussi bien considérer les parties B et la relation T. L'ordonné d'interpolation en résultant est isomorphe puisque

$Inf(Sup(A_1)) \perp Inf(Sup(A_2)) \longleftrightarrow sup(A_1)\ T\ sup(A_2)$

F) MULTITREILLIS ASSOCIATIFS

On a vu que les deux opérations V, Λ d'un multitreillis pouvaient s'écrire :

$a \vee b = m(maj(\{a, b\}))$

$a \wedge b = M(min(\{a, b\}))$

A partir de là, M. Benado définit :

$A \vee B = U\ (a \vee b \mid a \in A, b \in B)$

$A \wedge B = U\ (a \wedge b \mid a \in A, b \in B)$

L'inconvénient de telles définitions est que $(a \vee b) \vee c$ n'est pas nécessairement égal à $a \vee (b \vee c)$ comme on l'a déjà vu dans la figure 1.

Nous allons caractériser les multitreillis pour lesquels on a l'associativité. Nous adoptons donc exclusivement pour la fin de ce chapitre les définitions de AVB et AΛB de M. Benado. Pour les chapitres suivants, nous reprendrons la définition donnée en 2) de C.

On dira qu'un multitreillis P est associatif pour l'union si quels que soient a, b, c ∈ P : (aVb)Vc = aV(bVc).

On a la définition duale pour l'intersection.

Un multitreillis est associatif s'il est en même temps associatif pour l'union et l'intersection.

M. Benado en [7] pose la question de savoir, s'il existe des multitreillis associatifs autres que les treillis. Nous allons les caractériser.

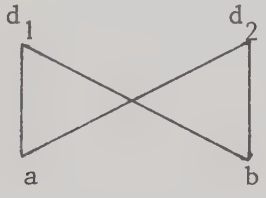


Figure 4

Lemme F1

Dans un multitreillis P, on a l'identité :

m((aVb)Vc) = m(aV(bVc))

Ceci résulte de C1

On a en effet :

m((aVb)Vc) = m(aV(bVc)) = Sup({a, b, c})

Théorème F2

P est associatif pour V si et seulement si, quels que soient a, b, c appartenant à P, (aVb)Vc est une partie libre.

Démonstration

- Par F1) la condition est clairement suffisante.
- Supposons maintenant que P est associatif pour V et (aVb)Vc n'est pas une partie libre.

On a donc $x, t \in (aVb)Vc$ et $x < t$

Soit $aVb = \{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$

$bVc = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

et $t \in d_1Vc$, $x \in d_2Vc$

Puisque $(aVb)Vc = aV(bVc)$ c'est que pour un e_1 et un e_2 de bVc on a $t \in aVe_1$, $x \in aVe_2$.

Considérons $(d_2Vb)Vc$

$d_2Vb = \{d_2\}$ donc $(d_2Vb)Vc = d_2Vc$

$x \in d_2Vc$ donc $t \notin d_2Vc$ ou $t \notin (d_2Vb)Vc$

Soit maintenant $d_2V(bVc) = d_2V\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

t majore e_1 $\quad t > x \geq d_2 \geq a$,

et $t \in maj(d_2, e_1)$

$t \notin aVe_1$, donc $t \in d_2Ve_1$ ou $t \in d_2V(bVc)$

Finalement $t \notin (d_2Vb)Vc$ mais $t \in d_2V(bVc)$, ce qui contredirait l'hypothèse d'associativité pour l'union.

Théorème F3

Un multitreillis P est associatif pour l'union si et seulement si quels que soient a, b, appartenant à P et d_1, d_2 appartenant à aVb, tels que $d_1 \neq d_2$, d_1 et d_2 n'ont aucun majorant commun.

Démonstration

- La condition est nécessaire. En effet :

Soit $aVb = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$, $n > 1$, et $p \in d_1Vd_2$

$d_1V(aVb) = d_1V\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ et $p \in d_1V(aVb)$

$(d_1Va)Vb = d_1Vb = \{d_1\}$.

Pour que le multitreillis soit associatif, il faut donc que d_1Vd_2 soit vide.

- La condition est suffisante.

Si en effet le multitreillis n'est pas associatif, d'après F2, on a $x, y \in (a \vee b) \vee c$ et $x < y$.

Soit $a \vee b = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$

$x \in d_1 \vee c$

$y \in d_2 \vee c$

Alors $y \geq d_2$ et $y > x \geq d_1$

c'est à dire que y majore d_1 et d_2.

Corollaire F4

Un multitreillis est associatif pour l'union et l'intersection quand pour chaque x, P_x et I_x sont des ensembles ordonnés possédant la propriété d'interpolation.

Démonstration

F3 est en effet équivalent à : "pour tout x, I_x possède la propriété d'interpolation".

Remarque : Un multitreillis peut être associatif sans posséder la propriété d'interpolation comme le montre la figure 4.

G) MULTIARBORESCENCE

Nous allons présenter ici un exemple de multitreillis associatif qui a déjà été utilisé en synthèse des fonctions booléennes [13] sans avoir été défini, ni étudié.

Définition

Un graphe (T, V), où T est l'ensemble des sommets, V l'ensemble des arcs, est une multiarborescence s'il y a au plus un chemin de tout sommet à tout autre sommet (et donc pas de circuit).

Exemples

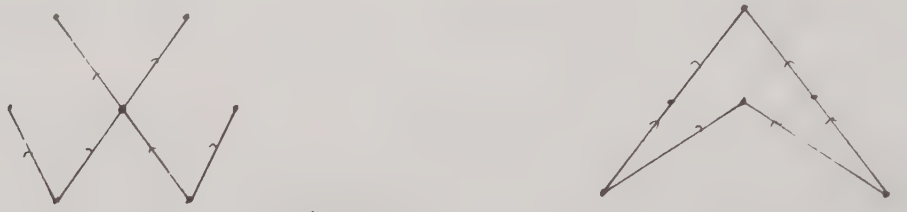


Figure 5

Propositions

G1) Une arborescence est une multiarborescence.

G2) Le dual d'une multiarborescence est une multiarborescence.

G3) Un sous-graphe d'une multiarborescence est une multiarborescence.

G4) Un graphe partiel d'une multiarborescence est une multiarborescence.

G5) Toute orientation d'un arbre donne une multiarborescence.

Fermeture transitive

La fermeture transitive forte d'une multiarborescence (T, V) est un ensemble ordonné puisqu'il s'agit d'un graphe sans circuit.

Notons la $(T, \leq)$

On sait que :

G6) La fermeture transitive d'une arborescence est un ensemble ordonné tel que deux éléments non comparables ont toujours une borne inférieure, mais pas de majorant commun.

Propositions

G7) Un ensemble ordonné est la fermeture transitive d'une multiarborescence si et seulement si deux éléments non comparables ne peuvent avoir à la fois un majorant commun et un minorant commun.

G8) Un ensemble ordonné est la fermeture transitive d'une multiarborescence si et seulement si, pour tout x, P_x est la fermeture transitive d'une arborescence.

Démonstration

Soient p et q $\in P_x$. p et q ayant un minorant commun x, ne peuvent avoir par G7) de majorant commun. Si maintenant a, b $\in M(\min(\{p, q\})) \cap P_x$, alors a, b ont un minorant commun x et un majorant commun p ou q, ce qui est impossible.

Donc P_x est la fermeture transitive d'une arborescence.

G9) Un ensemble ordonné est la fermeture transitive d'une multiarborescence si et seulement si, pour tout élément minimal x, P_x est la fermeture transitive d'une arborescence.

Multiarborescence et multitreillis associatif

La fermeture transitive d'une multiarborescence est évidemment un multitreillis associatif. De plus M. Benado définit un multitreillis distributif comme une multitreillis tel que les conditions $(a \vee b) \cap (a \vee c) \neq \emptyset$ et $(a \wedge b) \cap (a \wedge c) \neq \emptyset$ impliquent b = c.

G10) Une multiarborescence est un multitreillis associatif et distributif.

GRAPHE DE COMPARABILITE

(T, $\leq$) étant un ensemble ordonné, on rappelle que (T, U) est son graphe de comparabilité si c'est un graphe symétrique dont l'ensemble des sommets est T et l'ensemble des arêtes U est tel que :

$|x, y| \in U$ si $x \leq y$ ou $y \leq x$.

On note Comp(x) l'ensemble des éléments comparables à x dans (T, $\leq$).

Proposition G11

Dans la fermeture transitive d'une multiarborescence, si $x \in [a,b]$, alors $\text{Comp}(a) \cap \text{Comp}(b) \subseteq \text{Comp}(x) \subseteq \text{Comp}(a) \cup \text{Comp}(b)$.

Démonstration

Soit $y \in \text{Comp}(a) \cap \text{Comp}(b)$

On a soit $y \leq a$, soit $y \geq b$, soit $a \leq y \leq b$.

Il est clair que $y \in \text{Comp}(x)$ dans les 2 premiers cas. S'il n'en était pas de même pour le 3ème cas, y et x non comparables auraient un majorant commun b et un minorant commun a, ce qui est impossible.

Soit maintenant $y \notin Comp(x)$.
Si $y \leq x$, alors $y \in Comp(b)$. Si $y \geq x$, $y \in Comp(a)$, ce qui termine la démonstration.

Corollaire G12

Si $Comp(a) = Comp(b)$ et $x \in [a, b]$ alors $Comp(x) = Comp(a)$.

Théorème G13

Si T_1 et T_2 sont des multiarborescences connexes de même graphe de comparabilité, elles sont isomorphes ou anti-isomorphes.

Démonstration

D'après le corollaire précédent, il suffit de vérifier la propriété quand tous les Comp(x) sont distincts dans le graphe de comparabilité.

Il faut montrer qu'ayant choisi une orientation entre 2 éléments comparables, le graphe de comparabilité impose une orientation entre tous les autres couples. Le graphe étant connexe, il suffit donc de vérifier que si $a < b$ et c comparable à a, par exemple, l'orientation entre c et a n'est pas arbitraire.

- Si $c \notin Comp(b)$, on ne peut avoir $c < a$, puisque $a < b$, on a donc $c > a$.
- Si $c \in Comp(b)$, on a plusieurs cas à envisager
  Puisque $Comp(a) \neq Comp(b)$, on a l'une des deux situations :
  - il existe $d \in Comp(a)$, $d \notin Comp(b)$. Alors $a < d$
    - $d \notin Comp(c)$. Donc $c > a$
    - $d \in Comp(c)$. Il est clair que $c < b$, sinon b et d auraient un minorant commun a et un majorant commun c.
      Puisque $Comp(a) \neq Comp(c)$, on a 2 cas :
      - il existe $e \in Comp(a)$, $e \notin Comp(c)$
        - si $e \notin Comp(b)$, alors $a < e$ et $a < c$
        - si $e \in Comp(b)$, on a $e < b$ puisque $c < b$ et $e \notin Comp(c)$.
          Si $e > a$, alors $c > a$ et c, e ont un minorant commun a et un majorant commun b. Donc $e < a$, $c < a$.
      - $Comp(a) \subsetneq Comp(c)$. Alors il existe $e \in Comp(c)$, $e \notin Comp(a)$.
        a et c jouent alors des rôles inversés par rapport à la situation précédente, donc :
        - $e \notin Comp(b)$ implique $c < a$
        - $e \in Comp(b)$ implique $a < c$

- $Comp(a) \subsetneq Comp(b)$. Alors il existe $d \in Comp(b)$, $d \notin Comp(a)$.
  - si $d \in Comp(c)$, alors $a < c$
  - si $d \notin Comp(c)$, alors $c < b$

  On retrouve alors les 4 cas à envisager comme précédemment :
  - il existe $e \in Comp(a)$, $e \notin Comp(c)$
    - $e \notin Comp(b)$ implique $a < c$
    - $e \in Comp(b)$ implique $c < a$
  - il existe $e \in Comp(c)$, $e \notin Comp(a)$
    - $e \notin Comp(b)$ implique $c < a$
    - $e \in Comp(b)$ implique $a < c$.

Remarque

Cette dernière démonstration donne un algorithme de construction d'une multiarborescence à partir du graphe de comparabilité.

On passe au graphe quotient obtenu par la relation d'équivalence $a \equiv b$ si $Comp(a) = Comp(b)$.

Puis, pour chaque partie connexe, on ordonne arbitrairement 2 éléments comparables. Les autres éléments de la même partie connexe sont orientés de proche en proche.

Le théorème G13 nous indique donc que toutes les multi-arborescences obtenues sont isomorphes ou anti-isomorphes.

PREMIERE PARTIE

CHAPITRE II

Multitreillis semi-modulaires, modulaires, distributifs

A) RAPPELS

Longueur de chaîne

Dans ce chapitre, il ne sera question que de multitreillis ayant la propriété de longueur de chaîne de Jordan Dedekind.

Il y a une distinction entre multitreillis ayant la propriété de Jordan Dedekind et multitreillis gradué.

Rappelons la :

On dit qu'un multitreillis a la propriété de Jordan Dedekind si quels que soient x, y avec $x \leq y$, toutes les chaînes pleines entre x et y ont même longueur.
Nous noterons $x \prec y$ pour exprimer que y couvre x, c'est à dire que quel que soit z, $x \leq z \leq y$ implique $z = x$ ou $z = y$.

Un multitreillis P est gradué s'il existe une fonction h de P dans Z telle que :

$$x \prec y \leftrightarrow h(y) = h(x) + 1 \text{ et } x \leq y.$$

On peut rencontrer des multitreillis ayant la propriété de Jordan Dedekind sans être gradués.

Exemple :

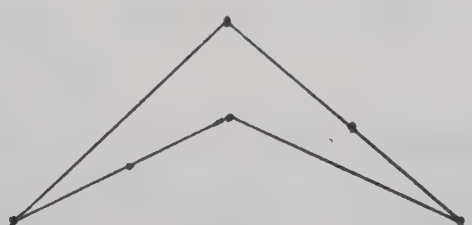


Figure 1

On trouve dans G. Birkhoff [4] la propriété :

A1) Un multitreillis avec 0 (ou avec 1) est gradué si et seulement si il possède la propriété de Jordan Dedekind.

Dans un multitreillis M gradué par h, pour tout élément x tel que $h(x) \leq h(y)$ pour chaque $y \in M$ on conviendra d'écrire $h(x) = 0$. Ainsi si M possède un élément nul 0, $h(0) = 0$. La fonction h sera alors appelée hauteur L'ensemble des éléments de même hauteur est appelé ligne.

Semi-modularité au sens de G. Birkhoff

On trouve dans G. Birkhoff [4] p. 39 et dans M. Barbut, B. Monjardet [1] p. 37 la définition suivante :

Un multitreillis M est semi-modulaire supérieurement (σ_1') quand il satisfait : soient a, b, d $\in$ M. Si a et b couvrent d et a $\neq$ b, alors il existe e $\in$ M, qui couvre a et b.

On définit de manière duale semi-modulaire inférieurement (σ_2').

Il est clair que chaque partie connexe d'un multitreillis semi-modulaire supérieurement est munie d'un élément universel 1.

L. Haskins et S. Gudder [15] démontrent les propriétés suivantes :

Proposition A2

- M est semi-modulaire supérieurement si et seulement si :

(Π_1') si d $\notin$ a$\wedge$b et d $\prec$ a alors il existe e $\in$ a$\vee$b, tel que b $\prec$ e.

- Un multitreillis semi-modulaire supérieurement est gradué et pour une graduation h :

(E_1') si d $\notin$ a$\wedge$b alors il existe e $\in$ a$\vee$b tel que

$$h(a) + h(b) \geq h(d) + h(e)$$

Semi-modularité au sens de M. Benado

On trouve dans M. Benado [7] la définition suivante :

Un multitreillis M est semi-modulaire supérieurement (noté σ_1 par M. Benado) quand il satisfait :
soient a, b, d $\in$ M, si a et b couvrent d et a $\neq$ b et a$\vee$b $\neq \emptyset$, alors, pour tout e $\in$ a$\vee$b, e couvre a et b.

On définit de manière duale semi-modulaire inférieurement (σ_2).

Il est clair que si un intervalle $[x, y]$ est semi-modulaire supérieurement (ou inférieurement) au sens de M. Benado, il l'est également au sens de G. Birkhoff.

On appelle branche b|a un couple d'éléments tel que b couvre a. M. Benado utilise le terme de quotient premier.

Nous avons préféré la notation $b|a$ qu'on rencontre souvent à la notation (a, b) qu'on réservera aux couples dans le produit cartésien de deux ensembles.

On dira suivant J. Kuntzmann [2] que des branches $b|a$ et $d|c$ sont équivalentes si elles sont confondues ou s'il existe une suite finie de branches $b|a = f_1|e_1, f_2|e_2, \ldots, f_n|e_n = d|c$ telle que les branches $f_i|e_i$ et $f_{i+1}|e_{i+1}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$ soient dans l'une des situations suivantes :

$$e_i \in e_{i+1} \wedge f_i \qquad f_{i+1} \in e_{i+1} \vee f_i \qquad (1)$$

ou $$e_{i+1} \in e_i \wedge f_{i+1} \qquad f_i \in e_i \vee f_{i+1} \qquad (2)$$

Les situations (1) et (2) se présentent donc ainsi :

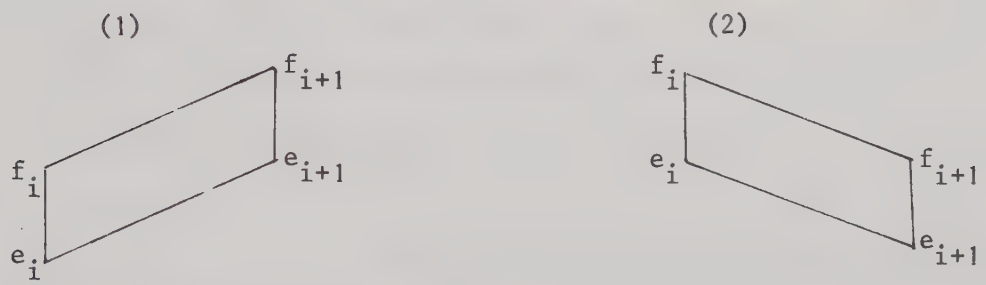


Figure 2

M. Benado définit pour les branches une notion non symétrique :

Les branches $b|a$ et $d|c$ sont directement T-semblables si on a seulement (1). Il note $b|a \sim d|c$.

Elles sont T-semblables d'en haut s'il existe une branche intermédiaire $h|g$ telle que $b|a \sim h|g$ et $d|c \sim h|g$.

Il définit de manière duale T-semblable d'en bas.

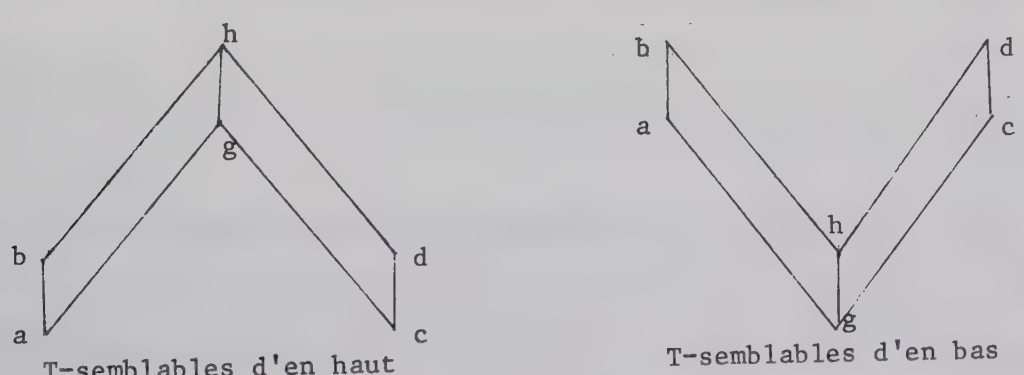


Figure 3

Il énonce dans [7] et [8] :

Propositions A3

- Les conditions suivantes sont équivalentes entre elles et à la semi-modularité supérieure au sens de M. Benado.

(Π_1) Si $d \in a \wedge b$ et $d \prec a$ alors pour tout $e \in aVb$ on a $e \succ b$

(B_1) Pour tout couple x, y avec $x < y$ deux chaînes pleines joignant x et y ont même longueur et il existe une bijection entre leurs branches de façon que les branches correspondantes soient T-semblables d'en haut et que la branche intermédiaire $h|g$ soit telle que $x \leq g \prec h \leq y$.

- Si toute partie connexe d'un multitreillis semi-modulaire supérieurement possède un 1, M est gradué et pour une graduation h :

(E_1) Si $d \in a \wedge b$ et $e \in aVb$ alors $h(a) + h(b) \geq h(d) + h(e)$

Multitreillis modulaires au sens de G. Birkhoff

Ces multitreillis sont surtout étudiés dans l'ouvrage de M. Barbut et B. Monjardet [1] et dans l'article de L. Haskins et S. Gudder [15].

Un multitreillis est modulaire au sens de G. Birkhoff s'il est en même temps semi-modulaire supérieurement (σ_1') et inférieurement (σ_2') au sens de G. Birkhoff.

Dans le cas fini, il est clair que toute partie connexe d'un tel multitreillis a un 0 et un 1 et on a déjà vu qu'il était gradué.
On trouve dans [15] les définitions et propriétés suivantes :

Notons h la fonction de graduation

aV^*b est l'ensemble des éléments x de aVb pour lesquels h(x) est le plus petit.

$a\Lambda^*b$ est l'ensemble des éléments x de $a \wedge b$ pour lesquels h(x) est le plus grand.

On a alors :

Proposition A4

Les conditions suivantes sont équivalentes entre elles et à la modularité au sens de G. Birkhoff.

(Π') si $a\wedge b$ et $a\vee b$ sont non vides

(Π'_1) si $d \in a\wedge b$ et $d \prec a$, alors il existe $e \in a\vee b$ tel que $b \prec e$.

(Π'_2) si $e \in a\vee b$ et $e \succ a$, alors il existe $d \in a\wedge b$ tel que $d \prec b$.

(E') M est gradué, chaque partie connexe a un 0 et un 1 et $h(a) + h(b) = h(d) + h(e)$, pour tout $e \in a\overset{*}{\vee} b$, tout $d \in a\overset{*}{\wedge} b$.

(A') Chaque partie connexe de M a un 0 et un 1 et

$b \leq c$ et $(a\overset{*}{\vee} b) \cap (a\overset{*}{\vee} c) \neq \emptyset$

$(a\overset{*}{\wedge} b) \cap (a\overset{*}{\wedge} c) \neq \emptyset$

impliquent $b = c$.

(α') M est gradué, chaque partie connexe a un 0 et un 1 et pour tout a, b, pour tout $d \in a\overset{*}{\wedge} b$ et tout $p \in [d, a]$, $p \in (p\overset{*}{\vee} b)\overset{*}{\wedge} a$.

(β') M est gradué, chaque partie connexe a un 0 et un 1 et pour tout a, b, pour tout $e \in a\overset{*}{\vee} b$ et pour tout $q \in [b, e]$, $q \in (q\overset{*}{\wedge} a)\overset{*}{\vee} b$.

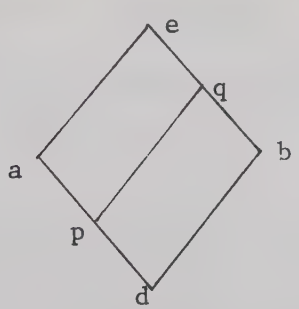


Figure 4

Multitreillis modulaires au sens de M. Benado

Définition

Un multitreillis est modulaire au sens de M. Benado, s'il est semi-modulaire supérieurement (σ_1) et inférieurement (σ_2) au sens de M. Benado.

On trouve dans [7] les définitions et propriétés suivantes :

Soit M un multitreillis

Une évaluation de première espèce est une fonction réelle v définie sur M de la manière suivante :

Pour tout a, $b \in$ M tels que $a\vee b \neq \emptyset$ et $a\wedge b \neq \emptyset$, il existe $e \in a\vee b$ et $d \in a\wedge b$ satisfaisant $v(a) + v(b) = v(d) + v(e)$.

Une évaluation de seconde espèce est une fonction réelle v définie sur M de la manière suivante :
Pour tout a, b ∈ M tels que $aVb \neq \emptyset$ et $a\Lambda b \neq \emptyset$, quel que soit $e \in aVb$, il existe $d \in a\Lambda b$ satisfaisant $v(a) + v(b) = v(d) + v(e)$.

Une évaluation de troisième espèce est une fonction réelle v définie sur M de la manière suivante :
Pour tout a, b ∈ M tels que $aVb \neq \emptyset$ et $a\Lambda b \neq \emptyset$, quel que soit $e \in aVb$ et quel que soit $d \in a\Lambda b$, on a : $v(a) + v(b) = v(d) + v(e)$.

Une évaluation est positive si $a < b$ implique $v(a) < v(b)$.

On a alors :

Proposition A5

Soit M un multitreillis à longueurs de chaînes finies. Les propriétés suivantes sont équivalentes entre elles et à la modularité au sens de M. Benado.

(Π) Soient a, b ∈ M
(Π_1) Si $d \in a\Lambda b$ et $d \prec a$, alors pour tout $e \in aVb$, on a $e \succ b$
(Π_2) Si $e \in aVb$ et $a \prec e$, alors pour tout $d \in a\Lambda b$, on a $d \prec b$.

(E) M possède une évaluation de 3ème espèce positive.

(A) Soient a, b, c ∈ M et $aVb \neq \emptyset$, $aVc \neq \emptyset$, $a\Lambda b \neq \emptyset$, $a\Lambda c \neq \emptyset$ et $b \leq c$
alors $(aVb) \cap (aVc) \neq \emptyset$
$(a\Lambda b) \cap (a\Lambda c) \neq \emptyset$
impliquent $b = c$

(α) Soient a, b ∈ M, $d \in a\Lambda b$, $e \in aVb$,
si $p \in [d, a]$ et $q \in bVp$, $q \leq e$, alors $p \in q\Lambda a$.

(β) Soient a, b ∈ M, $d \in a\Lambda b$, $e \in aVb$,
si $q \in [b, e]$ et $p \in a\Lambda q$, $p \geq d$, alors $q \in pVb$.

Dans les treillis modulaires ces équivalences s'expriment naturellement plus simplement.

L'évaluation se définit en remplaçant les signes d'appartenance par des égalités et en supprimant l'hypothèse : $aVb \neq \emptyset$, $a\Lambda b \neq \emptyset$, toujours vérifiée.

Il faut aussi remplacer l'appartenance par l'égalité dans (Π), (α), (β)

(A) s'écrit :
$b \leq c$ et $aVb = aVc$
$a\Lambda b = a\Lambda c$ impliquent $b = c$

B) MULTITREILLIS TRES CONNEXES

Dans un ensemble ordonné semi-modulaire supérieurement au sens de G. Birkhoff, on sait que si a et b distincts couvrent d, il existe une qui couvre a et b. Nous allons nous intéresser à une propriété un peu plus générale : la très connexité.

Rappelons qu'une relation d'ordre dans un ensemble M est connexe si quels que soient a et b, il existe une double suite d'éléments de M : p_1, p_2, ..., p_n, et q_1, q_2, ..., q_n telle que $a \leq p_1$, $q_1 \leq p_1$, $q_1 \leq p_2$, ..., $q_n \leq p_n$, $q_n \leq b$.

On définit alors :

Un multitreillis est dit très connexe s'il est gradué et si la relation d'ordre induite sur les éléments de 2 lignes consécutives quelconques est connexe.

Ainsi le multitreillis :

Figure 5

n'est pas très connexe car la relation d'ordre induite sur les éléments des lignes 0 et 1 n'est pas connexe.

Par contre celui-ci est très connexe

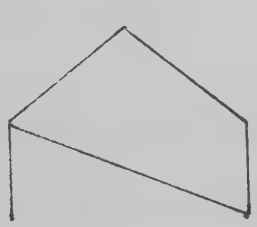


Figure 6

Après avoir remarqué qu'un multitreillis semi-modulaire supérieurement (ou inférieurement) est un cas particulier de multitreillis très connexe, on observera que le résultat du produit direct de deux multitreillis est très connexe sous certaines conditions, même si les multitreillis de départ ne le sont pas.

Théorème B1

Un multitreillis avec 0 et 1, semi-modulaire supérieurement (ou inférieurement) au sens de G. Birkhoff est très connexe.

Démonstration

Les lignes 0 et 1 sont naturellement connexes à cause de l'élément nul.

Supposons que les lignes i-1 et i soient très connexes, et considérons a et b de hauteur i.

Par hypothèse de récurrence, on peut trouver une suite de branches : $a|r_1$, $q_1|r_1$, $q_1|r_2$, ... $q_{n-1}|r_n$, $b|r_n$. On peut supposer les q_i distincts. Le multitreillis étant semi-modulaire supérieurement on a :

a et q_1 couvrent r_1. Il existe donc p_1 couvrant a et q_1.

q_1 et q_2 " r_2. " p_2 " q_1 et q_2

q_{n-1} et b " r_n. " p_n " q_{n-1} et b

ce qui montre que a et b sont connectés en passant uniquement par des éléments des lignes i et i+1.

Imposons maintenant aux multitreillis d'avoir toutes les chaînes maximales de même longueur.

Le produit cartésien de 2 ensembles T_1 et T_2 est noté $T_1 \times T_2$ et le produit direct des ensembles ordonnés est noté $T_1 \cdot T_2$.

Théorème B2

Soient les multitreillis T_1 et T_2 de hauteurs maxima respectives n_1 et n_2. Supposons que $n_1 \leq n_2$.

Le produit direct $T_1 \cdot T_2$ est très connexe si et seulement si :

1) Dans T_1 et dans T_2, les deux premières lignes sont connexes, ainsi que les deux dernières.

2) Si $n_2 > n_1+2$ n'importe quelles n_1+2 lignes consécutives sont connexes dans T_2.

Démonstration

Conditions nécessaires

La première est évidente en considérant les 2 premières lignes et les 2 dernières dans $T_1 \cdot T_2$.

Supposons maintenant que dans T_2, pour un certain n, $n_1+1 \leq n \leq n_2-2$, les lignes $n - n_1$, $n - n_1+1$, ..., n+1 soient non connexes.

La ligne n de $T_1 . T_2$ est formée des éléments de

la ligne 0 de T_1, la ligne n de T_2
" 1 " " n-1 "

" n_1 " " $n-n_1$ "

La ligne n+1 de $T_1 . T_2$ est formée des éléments de

la ligne 0 de T_1, la ligne n+1 de T_2
" 1 " " n "

" n_1 " " $n-n_1+1$ "

Les lignes n et n+1 de $T_1 . T_2$ ne peuvent être connexes car elles sont formées à partir de T_1 et des n_1+2 lignes $n-n_1$, $n-n_1+1$, ..., n+1 non connexes.

Conditions suffisantes

Il faut montrer que dans $T_1 . T_2$, les lignes n et n+1 sont connexes.

Soient dans $T_1 . T_2$ les éléments (x, y) et (z, t) sur la ligne n. Montrons qu'ils sont connectés en passant seulement par des éléments des lignes n et n+1.

Supposons que :

x est sur la ligne a de T_1
y " " c T_2
z " " b T_1
t " " d T_2

avec $a + c = b + d = n$

Pour faciliter la compréhension, l'élément en indice des lettres considérées indiquera la hauteur.

1er cas : $n \leq n_1$

Soient les suites $x_o \prec x_1 \cdots \prec x_a = x$ dans T_1

et $y = y_c \prec y_{c+1} \cdots \prec y_{c+a}$ dans T_2

On a alors dans $T_1 \cdot T_2$:

$$(x_a, y_c) \prec (x_a, y_{c+1})$$
$$(x_{a-1}, y_{c+1}) \prec (x_a, y_{c+1})$$
$$(x_{a-1}, y_{c+1}) \prec (x_{a-1}, y_{c+2})$$
$$(x_{a-2}, y_{c+2}) \prec (x_{a-1}, y_{c+2})$$
$$\vdots$$
$$(x_o, y_{c+a}) \prec (x_1, y_{c+a})$$

Puisque les 2 premières lignes de T_1 sont connexes, on peut passer de (x_o, y_{c+a}) à (z_o, y_{c+a}) en utilisant seulement dans T_2 les éléments y_{c+a} et y_{c+a-1}.

Par une procédure analogue à la précédente, mais en sens inverse, on passe de (z_o, y_{c+a}) à (z, y_d)

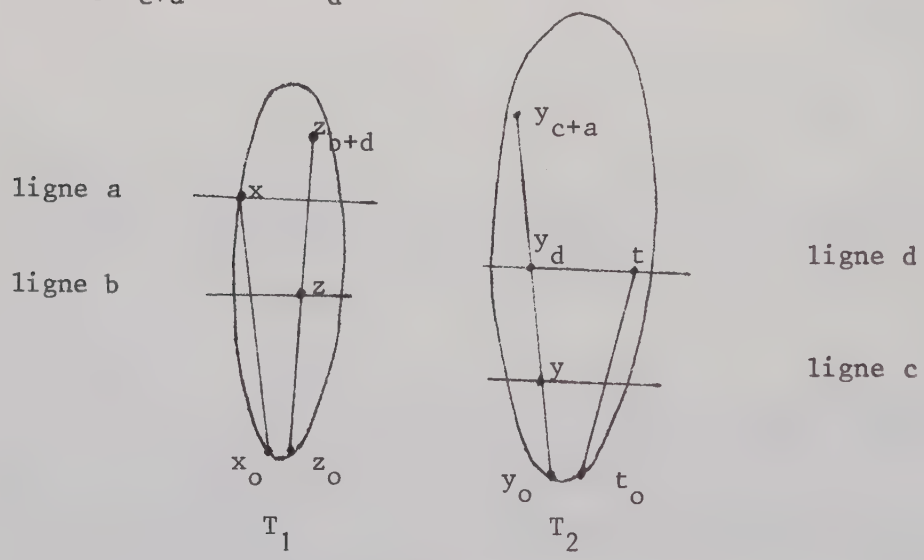


Figure 7

Enfin le passage de (z, y_d) à (z, t) s'effectue en montant dans T_1 : $z = z_b \prec z_{b+1} \cdots \prec z_{b+d}$ et en descendant dans T_2 : $y_d \succ y_{d-1} \cdots \succ y_o$ ce qui permet de passer à t_o et on remonte par t_1, t_2 jusqu'à t tandis qu'on redescend de z_{b+d} à z dans T_1.

2ème cas : $n \geq n_2 - 1$

C'est la démonstration duale : on utilise les deux dernières lignes de T_1 et T_2 pour connecter (x, y) et (z, t) au lieu d'utiliser les 2 premières.

3ème cas : $n_1 + 1 \leq n \leq n_2 - 2$

Ceci n'a de sens que si $n_2 > n_1 + 2$ sinon la première condition suffit par les 2 cas précédents.

Les lignes $n-n_1$, $n-n_1+1$, ..., $n+1$ sont connexes par hypothèse.

Tout élément de T_2 entre les lignes $n-n_1$ et n peut apparaître comme seconde composante sur la ligne n de $T_1 \cdot T_2$.

De même tout élément de T_2 entre les lignes $n-n_1+1$ et $n+1$ peut apparaître comme seconde composante sur la ligne $n+1$ de $T_1 \cdot T_2$.

On passe de (x, y_c) à (z, y_d) en connectant comme dans le premier cas par les lignes 0, 1 de T_1.

Il reste à passer de (z, y_d) à (z, t)

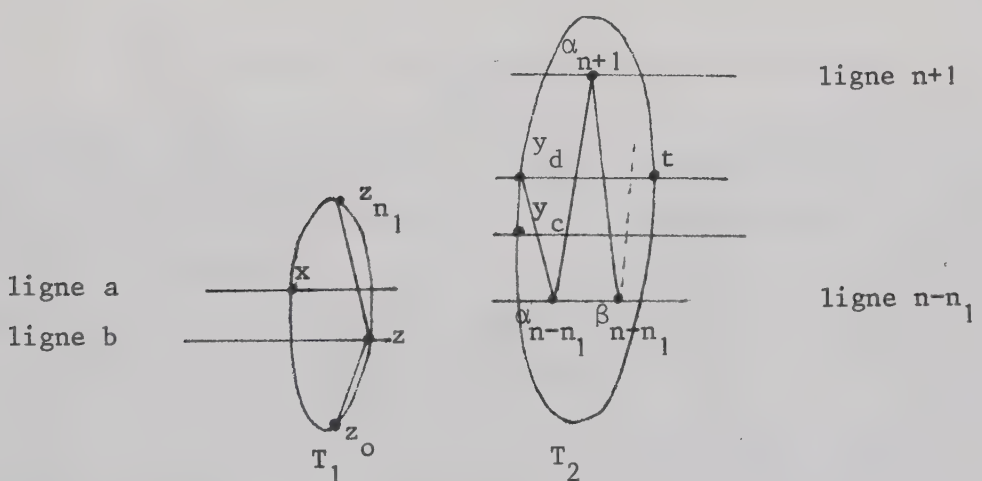


Figure 8

On peut supposer qu'on passe de y_d à t dans T_2 par les éléments inférieurs α_{n-n_1}, β_{n-n_1}, ..., γ_{n-n_1} de la ligne $n-n_1$ et les éléments supérieurs α_{n+1}, β_{n+1}, ..., γ_{n+1} tels que $\alpha_{n-n_1} \leq y_d$, $\alpha_{n-n_1} \leq \alpha_{n+1}$, $\beta_{n-n_1} \leq \alpha_{n+1}$ ...
On passe alors de (z, y_d) à $(z_{n_1}, \alpha_{n-n_1})$ puis à (z_o, α_{n+1}), (z_{n_1}, β_{n-n_1}), et ainsi de suite jusqu'à (z, t).

Corollaire B3

1) Pour tous ensembles ordonnés T_1 et T_2 avec 0 et 1, de hauteurs n_1 et n_2 avec $n_1 < n_2$, il existe n tel que $T_1^n . T_2$ est très connexe.

2) Si T_1 et T_2 avec 0 et 1 sont tels que $abs(n_1-n_2) \leq 2$, alors $T_1 . T_2$ est très connexe.

C) CONTRIBUTION A L'ETUDE DES MULTITREILLIS SEMI-MODULAIRES

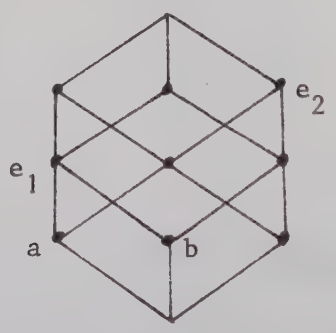
Remarquons d'abord qu'on pourrait introduire une semi-modularité plus faible que celle de G. Birkhoff en écrivant :

$$a \neq b,\ d \prec a,\ d \prec b \text{ et } aVb \neq \emptyset \rightarrow \exists\, e \in aVb,\ e \succ a,\ e \succ b.$$

Ce qui signifie qu'il n'existerait une couvranta et b que si $aVb \neq \emptyset$. Avec cette définition, même fini, le multitreillis n'aurait pas nécessairement d'élément nul ou d'élément universel pour chaque partie connexe et rien ne lui imposerait plus d'être gradué. Les propriétés seraient très faibles.

Nous conserverons donc les définitions données en A).

Vérifions d'abord sur un exemple qu'il peut exister des multitreillis semi-modulaires supérieurement au sens de G. Birkhoff (même modulaires) qui ne le soient pas au sens de M. Benado.



$aVb = \{e_1, e_2\}$

Figure 9

Multitreillis semi-modulaires au sens de G. Birkhoff

Théorème C1

Dans un multitreillis connexe semi-modulaire supérieurement au sens de G. Birkhoff, il existe entre les branches de deux chaînes pleines joignant x et 1 une bijection telle que les branches correspondantes soient équivalentes.

Démonstration

On fait une récurrence sur la propriété :

"S'il y a une chaîne de longueur m entre x et 1, alors entre les branches de deux chaînes pleines joignant x et 1, il existe une bijection telle que les branches correspondantes soient équivalentes"

La propriété est évidente si m = 2.

Supposons la réalisée pour m.

Soient deux chaînes α et β joignant x et 1, où α est de longueur m+1. Si la 1ère branche est la même dans α et β la démonstration est faite. Sinon soient $u|x$ et $v|x$ les premières branches de α et β.

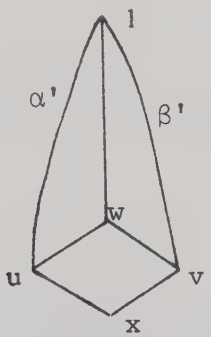


Figure 10

Par semi-modularité, il existe w couvrant u et v.
La portion α' de chaîne α entre u et 1 a pour longueur m.
Soit alors une chaîne u ... w ... 1. Elle est en bijection avec α' par hypothèse de récurrence et a pour longueur m.
Donc la portion β' de chaîne β entre v et 1 est en bijection avec la chaîne vw... 1.

$v|x$ est équivalente à $w|u$

Dans β' une branche est équivalente à $w|v$, les autres sont en bijection avec celles de la chaîne w ... 1.
De même $u|x$ est équivalente à $w|v$.
Et dans α' une branche est équivalente à $w|u$, les autres sont en bijection avec celles de la chaîne w ... 1.
Donc α et β sont en bijection.

Multitreillis semi-modulaires au sens de M. Benado

Théorème C2

Dans un multitreillis semi-modulaire supérieurement au sens de M.Benado, si a et b couvrent d et $aVb = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $n > 1$, alors pour tout $e \in x_1 V x_2 \ldots V x_n$, l'intervalle $[d, e]$ n'a qu'une classe de branches.

Démonstration

Soit une branche quelconque $g|f$ de l'intervalle $[d, e]$.

1er cas

Il existe un x_i tel que $x_i \leq f \prec g \leq e$

Il existe au moins un x_i, soit x_1 qui ne minore pas f.

Puisque $b \prec x_1$, il existe $f_1 \in fVx_1$, tel que f_1 minore e et f_1 couvre f.

Si f_1 est confondu avec g, alors la branche $g|f$ est équivalente à $x_1|b$ et $x_1|a$ donc à $a|d$ et $b|d$.

Sinon g et f_1 couvrent f, il existe donc g_1 minorant e qui couvre g et f_1.

Il existe au moins un x_i soit x_2 qui ne minore pas f_1.

Puisque $b \prec x_2$ il existe $f_2 \in f_1 V x_2$ tel que f_2 minore e et f_2 couvre f_1.

Ainsi on construit 2 suites $f_1 \prec f_2 \ldots \prec f_k$ et $g_1 \prec g_2 \ldots \prec g_k$ avec $f_1 \prec g_1$, $f_2 \prec g_2$, ...

Puisqu'on est dans le cas fini, on aura nécessairement pour un certain j : $f_{j+1} = g_j$ et alors $g|f$ est équivalente à $g_j|f_j$ donc à $x_{j+1}|a$ et $a|d$ et $b|d$.

2ème cas

Si f ne majore aucun x_i mais majore a, soit $f_1 \in fVx_1$ tel que f_1 minore e.

Si f_1 est confondu avec g, la branche $g|f$ est équivalente à $x_1|a$ donc à $b|d$.

Sinon on trouve $g_1 \in f_1 Vg$, tel que g_1 minore e.

$g_1|f_1$ est une branche répondant au 1er cas donc $g|f$, équivalente à $g_1|f_1$ est équivalente à $a|d$ et $b|d$.

3ème cas

Si f ne majore pas a, on prend $f_1 \in fVa$ tel que f_1 minore e et $g_1 \in f_1Vg$ tel que g_1 minore e si toutefois $f_1 \neq g$.

$g_1|f_1$ est une branche répondant au 1er ou 2ème cas.

Finalement toutes les branches de $[d, e]$ sont équivalentes à $a|d$ et $b|d$ donc entre elles.

Extension

G. Boulaye [10] et C. Benzaken et J. Kuntzmann [2] définissent ainsi cette opération :

L'extension d'un ensemble ordonné T, relative à une partie T_1 de T munie de l'ordre induit est une opération qui consiste à prendre la partie du produit direct T. 2^1 définie comme l'ensemble des éléments $\begin{cases} (a, 0) & \text{où } a \in T \\ (b, 1) & \text{où } b \in T_1 \end{cases}$

L'extension est dite simple si T_1 est un intervalle de T.

La partie par rapport à laquelle se fait l'extension sera toujours appelée T_1.

Proposition C3

L'extension de T est connexe si et seulement si T est connexe.

Proposition C4

Si T_1 est un intervalle de T semi-modulaire inférieurement au sens de G. Birkhoff, alors l'extension simple d'un multitreillis T semi-modulaire inférieurement au sens de G. Birkhoff est un multitreillis semi-modulaire inférieurement au sens de G. Birkhoff.

Démonstration

Considérons deux éléments de l'extension, a, b couverts par un troisième d.

Si $a = (\alpha, 0)$, $b = (\beta, 0)$, alors $(\alpha, 0) \prec (\delta, 0)$, $(\beta, 0) \prec (\delta, 0)$.

Donc il existe γ dans T couvert par α et β c'est à dire que $(\alpha, 0)$ et $(\beta, 0)$ couvrent $(\gamma, 0)$.

Si $a = (\alpha, 1)$, $b = (\beta, 1)$ la même démonstration s'applique.

Si $a = (\alpha, 1)$, $b = (\beta, 0)$, d a nécessairement la forme $(\beta, 1)$ et $\alpha \prec \beta$.

Donc a et b couvrent $c = (\alpha, 0)$.

Corollaire C5

L'extension simple d'un multitreillis semi-modulaire inférieurement au sens de M. Benado, muni d'un 0, est un multitreillis semi-modulaire inférieurement au sens de G. Birkhoff.

Ce n'est en général pas un multitreillis semi-modulaire au sens de Benado car si $(\delta, 1)$ couvre $(\alpha, 1)$, au moins un élément de $\alpha \wedge \beta$ appartient à T_1 mais pas nécessairement tous.

Conservation par homomorphismes

J. Kuntzmann donne en [17] la définition la plus générale d'un homomorphisme de $p^{ième}$ catégorie d'une relation. Rappelons la dans le cadre qui nous préoccupe.

Un homomorphisme de $p^{ième}$ catégorie, privilégié par rapport aux p premières variables, d'une relation R, n-aire, avec $n \geq p$, dans un ensemble E est une application f de E dans E' muni d'une relation n-aire R' et telle que :

i) $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ implique $R'(f(a_1), f(a_2) \ldots f(a_n))$

ii) $R'(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$ implique : $\forall b_1 \in f^{-1} f(a_1), \ldots,$
$\forall b_p \in f^{-1} f(a_p), \exists b_{p+1} \in f^{-1} f(a_{p+1}), \ldots, \exists b_n \in f^{-1} f(a_n)$
tels que $R(b_1, b_2, \ldots b_n)$.

A propos des multitreillis, on s'intéressera aux homomorphismes de relations d'ordre. A propos des treillis, on s'intéressera en plus aux homomorphismes de relation ternaire : $aVb = c$, $a \wedge b = c$.

L'homomorphisme d'ordre de 2ème catégorie est en fait un isomorphisme puisque $\phi(a) = \phi(b)$ implique $a \leq b$, $b \leq a$ donc $a = b$.

L'homomorphisme d'ordre de 1ère catégorie, comme on le verra conserve très peu de propriétés.

L'homomorphisme d'ordre strict de 2ème catégorie est très fort : 2 éléments ne peuvent avoir même image que si : quand un élément est inférieur à l'un, il est inférieur à l'autre, quand un élément est supérieur à l'un, il est supérieur à l'autre.

L'homomorphisme d'ordre strict de 1ère catégorie conserve très peu de propriétés.

Nous introduirons un homomorphisme quasi d'ordre strict de 2ème catégorie, un peu plus général, ainsi défini :

$$a \leq b \rightarrow \phi(a) \leq \phi(b)$$

$$\phi(a) < \phi(b) \rightarrow \forall\, a_1 \in \phi^{-1}\, \phi(a),\ \forall\, b_1 \in \phi^{-1}\, \phi(b) : a_1 < b_1$$

On définirait de même quasi d'ordre strict de 0ème, de 1ère catégorie.

Lemme C6

Si ϕ est un homomorphisme quasi d'ordre strict de 2ème catégorie, alors pour $\phi(a) \neq \phi(b)$, on a :

$$\phi(e) \in \phi(a) \vee \phi(b) \leftrightarrow \exists\, c \in \phi^{-1}\, \phi(e) : c \in a \vee b$$

$$\phi(d) \in \phi(a) \wedge \phi(b) \leftrightarrow \exists\, c \in \phi^{-1}\, \phi(d) : c \in a \wedge b$$

Démonstration

Soit $e \in aVb$. Alors $e \geq a$, $e \geq b$.

Donc $\phi(e) \geq \phi(a)$, $\phi(e) \geq \phi(b)$

Il existe donc $\phi(c) \in \phi(a)V\phi(b)$ tel que $\phi(c) \leq \phi(e)$.

Il s'ensuit qu'il existe $c \leq e$ tel que $c \geq a$, $c \geq b$.

Donc $c = e$, $\phi(c) = \phi(e) \in \phi(a)V\phi(b)$

Réciproquement si on a $\phi(e) \in \phi(a)V\phi(b)$, alors $\phi(e) \geq \phi(a)$, $\phi(e) \geq \phi(b)$

donc $e \geq a$, $e \geq b$.

Il existe donc un $c \in aVb$, et minorant e tel que

$\phi(c) \geq \phi(a)$, $\phi(c) \geq \phi(b)$ et $\phi(c) \leq \phi(e)$. Donc $\phi(c) = \phi(e)$

La démonstration est la même pour l'intersection.

Proposition C7

L'homomorphe quasi d'ordre strict de 2ème catégorie d'un multitreillis semi-modulaire supérieurement (inférieurement) au sens de G. Birkhoff est un multitreillis semi-modulaire supérieurement (inférieurement) au sens de G. Birkhoff.

Démonstration

D'abord il est clair que chaque partie connexe de l'homomorphe est munie d'un élément universel.

Supposons maintenant que $\phi(b) \neq \phi(a)$ et $\phi(d) \prec \phi(b)$, $\phi(d) \prec \phi(a)$. Alors, par C6, on peut trouver $d \in a \wedge b$. Les éléments de $]d, a]$ ne peuvent être que des éléments de $\phi^{-1}\ \phi(a)$, ceux de $]d, b]$, de $\phi^{-1}\ \phi(b)$. Donc on trouve $d \prec a_1$, $d \prec b_1$.
Il existe alors e couvrant a_1 et b_1. Par suite, il existe $\phi(e)$ couvrant $\phi(a)$ et $\phi(b)$.

Proposition C8

L'homomorphe quasi d'ordre strict de 2ème catégorie d'un multitreillis semi-modulaire supérieurement (inférieurement) au sens de M. Benado est un multitreillis semi-modulaire supérieurement (inférieurement) au sens de M. Benado.

C'est la même démonstration.

Remarque

Cette propriété n'est pas vraie pour un homomorphisme quasi d'ordre strict de 1ère catégorie comme le montre l'exemple suivant :

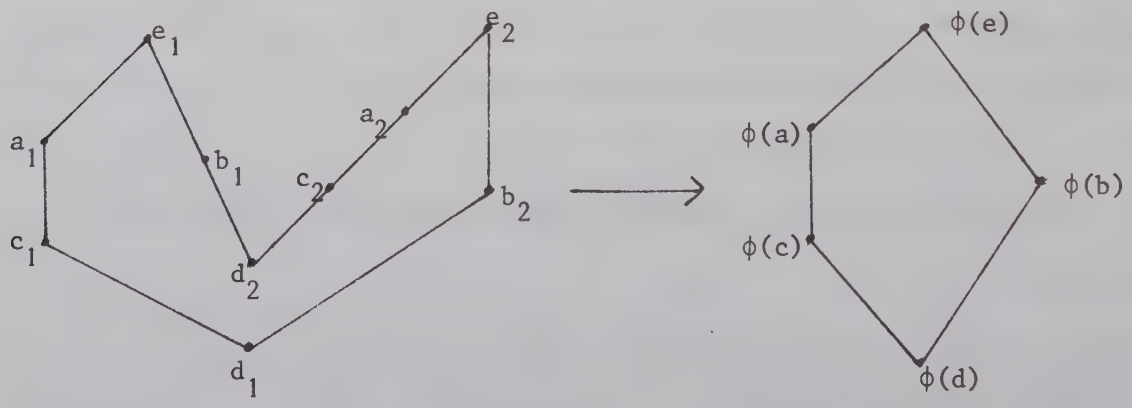


Figure 11

Cas particulier de multitreillis semi-modulaires : les ensembles ordonnés d'interpolation semi-modulaires

Les ensembles ordonnés possédant la propriété d'interpolation ont été notés EOI en IIA.

On peut les considérer comme des multitreillis tels que, quels que soient a et b, card(aVb) = 0 ou 1.

Extension

On appellera T_1 comme précédemment la partie de T qui sert pour l'extension. Considérons que T est un EOI.

Proposition C9

L'extension simple de T est un EOI si et seulement si T_1 est un EOI.

Démonstration

Admettons d'abord que T_1 est un EOI. Il est alors clair que si les éléments

(a, 0) et (b, 0)
(a, 1) et (b, 1)
(a, 1) et (b, 0)

ont un minorant commun, ils ont une borne inférieure unique.

Réciproquement, si T_1 n'est pas un EOI, on peut trouver dans T_1 a et b tels que card(aVb) > 1 donc card((a, 1) V (b, 1)) > 1.

Appelons sous-EOI la notion qu'on trouve dans l'ouvrage de G. Grätzer [14] sous le nom de sous algèbre, à propos d'opérations partielles et dans J. Kuntzmann [17] sous le nom de sous relation de 2ème catégorie privilégiée par rapport aux 2 premières variables et qu'on peut définir ainsi dans ce cas particulier :

Si S est un EOI, un sous-EOI T de S sera un EOI qui est en même temps une partie de T munie de l'ordre induit telle que, pour tout a, b $\in$ T :

aVb = c dans S $\leftrightarrow$ c $\in$ T et aVb = c dans T
aΛb = c dans S $\leftrightarrow$ c $\in$ T et aΛb = c dans T.

Proposition C10

L'extension simple de S est un sous EOI de $S.2^1$.

Démonstration

Sous réserve d'existence, on a :

$(a, 0) \vee (b, 0) = (a \vee b, 0)$

$(a, 0) \wedge (b, 0) = (a \wedge b, 0)$

$(a, 1) \vee (b, 1) = (a \vee b, 1)$

$(a, 1) \wedge (b, 1) = (a \wedge b, 1)$

De plus, si $(a, 0) \vee (b, 1) = (c, 1)$, puisque l'extension est simple, c'est que $[b, c] \subseteq T_1$. Donc $a \vee b \in T_1$ et $(a, 0) \vee (b, 1) = (a \vee b, 1)$ ou $c = a \vee b$.

Corollaire C11

L'extension simple d'un EOI semi-modulaire inférieurement est un EOI semi-modulaire inférieurement.

Homomorphismes

Considérons à nouveau les homomorphismes quasi d'ordre strict de 2ème catégorie.

D'après le lemme C6, si $a \vee b$ est composé d'un seul élément, $\phi(a) \vee \phi(b)$ aussi d'où

Proposition C12

L'homomorphe quasi d'ordre strict de 2ème catégorie d'un EOI est un EOI.

Remarque

La proposition n'est pas vraie pour un homomorphisme quasi d'ordre strict de 1ère catégorie.

Proposition C13

L'homomorphe quasi d'ordre strict de 2ème catégorie d'un EOI semi-modulaire supérieurement est un EOI semi-modulaire supérieurement.

C'est une conséquence des propositions C8 et C12.

Autres homomorphismes

On peut considérer la relation R(a, b, c) qui signifie $a \wedge b = c$. L'homomorphisme de 2ème catégorie par rapport aux 2 premières variables pour l'intersection est appelé par G. Grätzer homomorphisme fort dans une algèbre partielle. On peut l'écrire ainsi :

- $a \wedge b$ existe $\rightarrow f(a) \wedge f(b)$ existe et $f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b)$
- $f(a) \wedge f(b) = f(c) \rightarrow \forall\, a' \in f^{-1} f(a), \forall\, b' \in f^{-1} f(b)\ \exists\, c' \in f^{-1} f(c)$ tels que $a' \wedge b' = c'$.

On définit de manière duale l'homomorphisme pour l'union.

Proposition C14

L'homomorphe de 2ème catégorie pour l'intersection (union) d'un EOI est un EOI.

Démonstration

Soit T un EOI. Montrons d'abord que f(T) est un ensemble ordonné. On introduit pour cela la relation dans f(T) : $f(x) \leq f(y) \leftrightarrow f(x) \wedge f(y) = f(x)$
La réflexivité est évidente.
Pour la transitivité si $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(z)$ alors on a
pour un $x_1 \in f^{-1} f(x)$: $x \wedge y = x_1$ donc $x_1 \leq y$

de même pour un y_1 : $y_1 \leq z$

alors $x_1 \wedge y_1 = x_2$, $x_2 \leq y_1$ d'où $x_2 \leq z$

et $f(x) \leq f(z)$

Pour l'antisymétrie si $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$
alors $f(x) \wedge f(y) = f(x)$ et $f(x) \wedge f(y) = f(y)$
d'où $f(x) = f(y)$.

Montrons maintenant que f(T) est un EOI.
Supposons que f(a) et f(b) aient un minorant commun f(c),
alors $f(a) \wedge f(c) = f(c)$
$f(b) \wedge f(c) = f(c)$
soit $a \wedge c = c_1$ pour un $c_1 \in f^{-1} f(c)$
$b \wedge c = c_2$ " $c_2 \in f^{-1} f(c)$

Mais $f(c) \wedge f(c) = f(c)$
Donc $c_1 \wedge c_2 = c_3$ pour un $c_3 \in f^{-1} f(c)$

Ainsi $c_3 \leq a$, $c_3 \leq b$. a et b ont un minorant commun donc ils ont une borne inférieure unique. Donc f(a) et f(b) ont une borne inférieure unique.

Remarques

- L'homomorphe de 1ère catégorie pour l'intersection d'un EOI n'est pas un EOI en général.
- On vient de voir que l'homomorphe de 2ème catégorie pour l'intersection donne un EOI. Mais si T est semi-modulaire inférieurement ou supérieurement son homomorphe ne l'est pas nécessairement.

Ainsi :

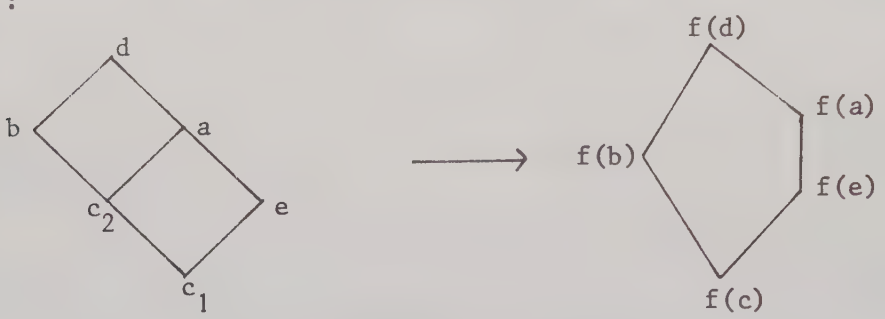


Figure 12

Exemple d'un EOI semi-modulaire inférieurement

O_n, demi-treillis des ordres sur un ensemble E à n éléments est un EOI semi-modulaire avec O. Il est étudié dans l'ouvrage de M. Barbut, B. Monjardet où on trouve l'exemple pour n = 3.

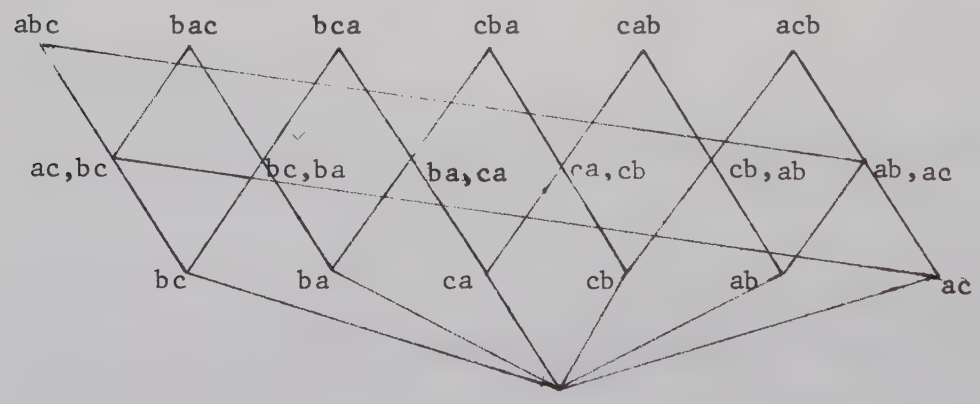


Figure 13

Les éléments maximaux sont les n! ordres totaux.
Les sous-treillis maximaux sont isomorphes au treillis des ordres partiels naturels définis ainsi :

Si E = {1, 2, ..., n}, P est un ordre partiel naturel si xPy implique $x \leq y$. Cette façon de numéroter les éléments d'un ensemble ordonné revient à peu de chose près à trouver la fonction ordinale d'un graphe sans circuit.

D) CONTRIBUTION A L'ETUDE DES MULTITREILLIS MODULAIRES

Nous avons rencontré 2 types de modularité

(M1) au sens de G. Birkhoff

(M2) au sens de M. Benado

Introduisons en un troisième

(M3) Si $a \leq c$ et bVa, $b\Lambda c$ sont non vides, alors pour tout $d \in b\Lambda c$, il existe $e \in aVd$ tel que $e \in (aVb)\Lambda c$.

Proposition D1

(M3) caractérise les ensembles ordonnés d'interpolation modulaires.

Démonstration

Soit $a \in b\Lambda c$
Alors pour tout $d \in b\Lambda c$ on a $e \in aVd$ et $e \in (aVb)\Lambda c$.
Donc $e \in b\Lambda c$ donc $d = a$
Ainsi $card(b\Lambda c) = 1$. C'est un ensemble ordonné d'interpolation.

Remarque

Il est clair que (M3) → (M2) et que si chaque partie connexe du multitreillis a un 0 et un 1, (M2) → (M1)

(M3) se réécrira sous la forme

(M) si $a \leq c$ et bVa, $b\Lambda c$ sont non vides alors
$aV(b\Lambda c) = (aVb)\Lambda c$

Exemple de multitreillis modulaires au sens de **G. Birk**hoff

On trouve dans P. Jullien [16] la relation d'ordre ainsi définie :

Soit V un ensemble fini appelé vocabulaire dont les éléments notés a, b, c, ... sont appelés lettres et dont les suites finies de lettres, notées A, B, C, ... sont appelées mots.

$V^* = V^+ \cup \{\varepsilon\}$ où ε est le mot vide, composé d'aucune lettre.

Etant donnés deux mots A et B, on appelle concaténat et on note AB le mot formé des lettres de A suivies des lettres de B. Cette opération appelée concaténation est associative. Le mot AA est noté A^2, AAA est noté A^3 et ainsi de suite ; A^1 est A.

On dit que B est un sous-mot de A quand B est une suite extraite de A.

Intuitivement B est un sous-mot de A quand il est obtenu par suppression de certaines, éventuellement 0, lettres de A.

On note $B \leq A$. Ainsi ail $\leq$ famille.

P. Jullien donne un algorithme pour vérifier si $B \leq A$ puis des propriétés sur la finitude de certaines parties de V^+.

Puisque nous nous intéressons à des multitreillis finis, on peut toujours considérer qu'on travaille dans des sous-mots de A. On a donc un multitreillis dont le 0 est ε et le 1 est A.

Théorème D2

Ce multitreillis est modulaire au sens de G. Birkhoff.

Démonstration

- C'est évident si V ne contient qu'une lettre
- Supposons donc que V contient au moins a et b.

Soient A et B couvrant C.

On peut écrire C = DEF, A = D a EF, B = DE b F.

Il est alors clair que le mot DaEbF couvre A et B.
On a donc démontré la semi-modularité supérieure au sens de G. Birkhoff. Pour la semi-modularité inférieure, si A et B sont obtenus à partir de C en enlevant une lettre, il est clair qu'on trouve une borne inférieure de A et B en enlevant ces deux lettres.

Remarque

En général ce multitreillis n'est pas modulaire au sens de M. Benado. Ainsi, par exemple, si D = F = ε et E = abba, on trouve le mot abababa qui majore aE et Eb et qui est tel qu'aucun autre mot inférieur à lui ne majore aussi aE et Eb. Et manifestement abababa ne couvre pas aE ni Eb.

V-irréductibles

On dira dans un multitreillis que x est V-irréductible si $x \in y \vee z$ implique x = y ou x = z. On définit de manière duale Λ-irréductible.

Les seuls éléments V-irréductibles du multitreillis V^* sont ceux de la forme a^i pour $a \in V$.

Proposition D3

Si A est à la hauteur m, il y a exactement m V-irréductibles dans I_A.

Démonstration

Admettons que A contient $n_1 a$, $n_2 b$, ..., $n_p d$, avec $\sum_{i=1}^{p} n_i = m$.

Les V-irréductibles qui minorent A sont :

$$a, a^2, a^3, \ldots, a^{n_1}, b, b^2, \ldots, b^{n_2}, \ldots, d, d^2, \ldots, d^{n_p}$$

Il y en a donc $\sum_{i=1}^{p} n_i = m$.

Multitreillis des chemins d'un graphe

Soit un graphe (X, U) ; X est l'ensemble des sommets, U est l'ensemble des arcs. Alors les chemins (circuits inclus) forment une partie de U^* qu'on peut organiser en multitreillis comme on vient de le voir.

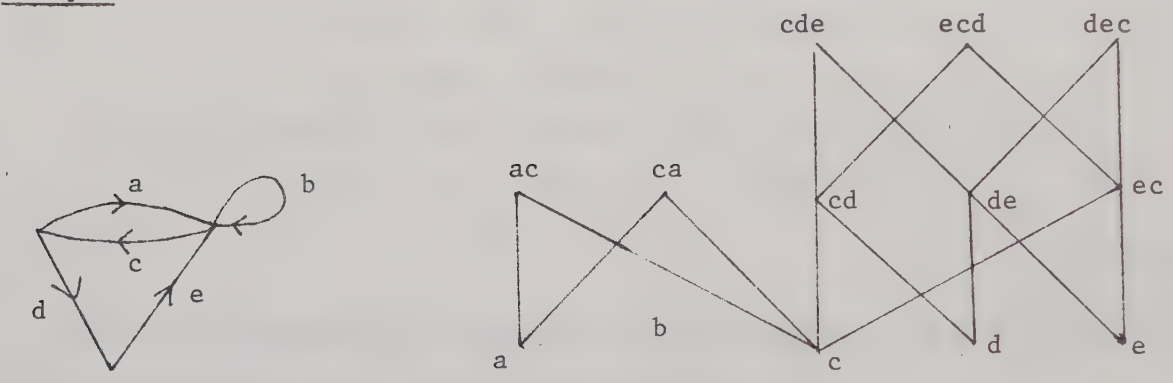
Ce multitreillis est encore modulaire au sens de G. Birkhoff. AVB peut fort bien être vide quand il ne l'était pas dans le précédent.

Chemins élémentaires

On obtient une partie du multitreillis précédent.

On peut considérer des circuits comme distincts s'ils n'ont pas la même origine.

Exemple :



Graphe Multitreillis des chemins élémentaires

Figure 14

Cas particuliers de multitreillis modulaires : les ensembles ordonnés d'interpolation modulaires

Les 6 propositions équivalentes vues à propos des multitreillis modulaires au sens de M. Benado se retrouvent ici. On n'a que la contrainte supplémentaire : card(aVb) = 0 ou 1, card(aΛb) = 0 ou 1.

EOI modulaire libre à 3 générateurs

Nous allons nous intéresser à l'EOI modulaire libre à 3 générateurs quand certaines bornes supérieures et inférieures n'existent pas.

Proposition D4

L'EOI modulaire libre à 3 générateurs x, y, z quand xVz, yVz, xΛy n'existent pas est représenté par le diagramme ci-dessous et a 21 éléments.

Démonstration

Nous avons pris les mêmes notations que dans le diagramme de G. Birkhoff du treillis modulaire libre à 3 générateurs.

Toutefois les a_i, b_i, c_i ... ne peuvent se définir aussi systématiquement.

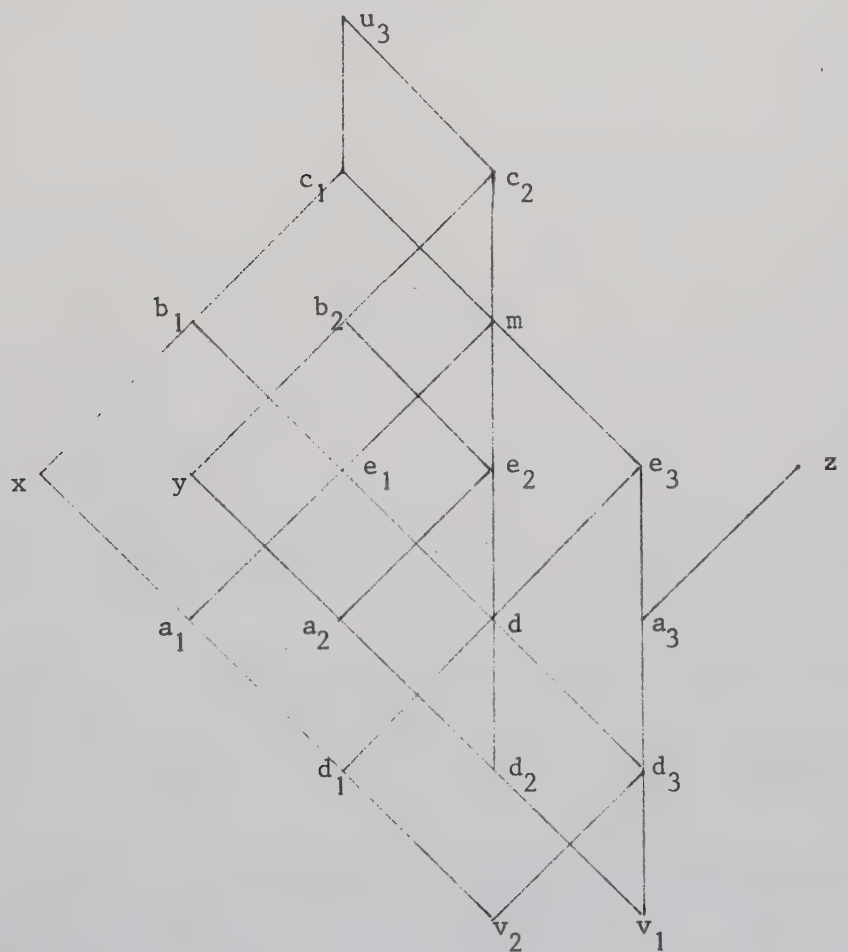


Figure 15

On considère

(1) $u_3 = xVy$

(2) $v_1 = y\Lambda z$

(3) $v_2 = x\Lambda z$

(4) $a_3 = z\Lambda u_3$

(5) $d_3 = v_1 V v_2$

(6) $c_2 = yVa_3$

(7) $c_1 = xVa_3$

(8) $b_1 = xVv_1$

(9) $b_2 = yVv_2$

(10) $e_1 = b_1\Lambda c_2$

(11) $e_2 = b_2\Lambda c_1$

(12) $e_3 = a_3 V(e_1\Lambda e_2)$

(13) $m = c_1\Lambda c_2$

(14) $d = e_1\Lambda e_2$

(15) $d_1 = x\Lambda d$

(16) $d_2 = y\Lambda d$

(17) $a_1 = x\Lambda e_1$

(18) $a_2 = y\Lambda e_2$

Il serait fastidieux de vérifier toutes les unions et intersections des 21 éléments, quand elles existent. Nous allons toutefois vérifier que :

$$e_1 V e_2 = e_1 V e_3 = e_2 V e_3$$

$$e_1 \Lambda e_2 = e_1 \Lambda e_3 = e_2 \Lambda e_3$$

Il suffit pour cela de montrer que $e_1 V e_2 = e_1 V e_3$ et $e_1 \Lambda e_2 = e_1 \Lambda e_3$ à cause des rôles symétriques joués par x et y.

$e_1 V e_2 = (b_1 \Lambda c_2)\ V\ (b_2 \Lambda c_1)$ or $b_1 \leq c_1$

Donc $= ((b_1 \Lambda c_2) V b_2) \Lambda c_1$ par (M)

$= (b_1 V b_2) \Lambda c_1 \Lambda c_2$ par (M)

$= c_1 \Lambda c_2$

$e_1 V e_3 = a_3 V e_1 = a_3 V (b_1 \Lambda c_2)$ or $a_3 \leq c_2$

Donc $= (a_3 V b_1) \Lambda c_2$ par (M)

$= (a_3 V x V v_1) \Lambda c_2$

$= (a_3 V x) \Lambda c_2$

$= c_1 \Lambda c_2$

$e_1 \Lambda e_3 = ((e_1 \Lambda e_2) V a_3) \Lambda e_1$

$= (e_1 \Lambda e_2)\ V\ (a_3 \Lambda e_1)$ par (M)

$= (e_1 \Lambda e_2)\ V\ (a_3 \Lambda b_1 \Lambda c_2)$

$= (e_1 \Lambda e_2)\ V\ (a_3 \Lambda b_1)$

$= (e_1 \Lambda e_2)\ V\ (a_3 \Lambda (x V v_1))$

$= (e_1 \Lambda e_2)\ V\ (v_1 V (x \Lambda a_3))$ par (M)

$= (e_1 \Lambda e_2)\ V\ (v_1 V (x \Lambda (z \Lambda u_3)))$

$= (e_1 \Lambda e_2)\ V\ (v_1 V v_2)$

$= e_1 \Lambda e_2$

Nous allons maintenant donner une propriété qui sera utile pour les EOI distributifs.

Proposition D5

Dans un EOI, la propriété (M) est équivalente à la propriété (M4) suivante.

(M4) Si xVy, $z\Lambda x$, $z\Lambda y$ existent alors les éléments e_1, e_2, e_3 définis comme précédemment par (1) ... (12) sont tels que

$e_1 \Lambda e_2 = e_1 \Lambda e_3 = e_2 \Lambda e_3$

$e_1 V e_2 = e_1 V e_3 = e_2 V e_3$

Démonstration

Il reste à vérifier que (M4) $\rightarrow$(M)

Supposons que $z\Lambda y$, xVy, $z\Lambda x$ existent et on a $x \leq z$.

Il faut montrer que $xV(y\Lambda z) = (xVy)\Lambda z$

$$e_2 = (xVy) \Lambda (xV(z\Lambda(xVy))), \quad \text{car } y \text{ V } (x\Lambda z) = xVy \quad \text{puisque } x \leq z$$
$$= (xVy)\Lambda z\Lambda(xVy) \quad \text{car } z\Lambda(xVy) \geq x$$
$$= z\Lambda(xVy)$$

$$e_1\Lambda e_2 = (xVy) \Lambda (xV(y\Lambda z))$$
$$= xV(y\Lambda z)$$

$$e_3 = (z\Lambda(xVy)) \text{ V } (xV(y\Lambda z))$$
$$= z\Lambda(xVy) \quad \text{car } e_2 \geq e_1\Lambda e_2$$

Donc $e_2 = e_3$

Mais $e_1\Lambda e_2 = e_2\Lambda e_3$

d'où $xV(y\Lambda z) = (xVy)\Lambda z$.

E) CONTRIBUTION A L'ETUDE DES MULTITREILLIS DISTRIBUTIFS

On dit qu'un multitreillis est distributif si :

(D1) Quels que soient a, b, c

$(aVb) \cap (aVc) \neq \emptyset$ }
$(a\Lambda b) \cap (a\Lambda c) \neq \emptyset$ } impliquent $b = c$

Introduisons aussi les définitions :

(D2) Si $b\Lambda c$, aVb, aVc sont non vides
alors $\{aV(b\Lambda c)\} \cap \{(aVb) \Lambda (aVc)\} \neq \emptyset$

(D2*) Si bVc, $a\Lambda b$, $a\Lambda c$ sont non vides
alors $\{a\Lambda(bVc)\} \cap \{(a\Lambda b) \text{ V } (a\Lambda c)\} \neq \emptyset$.

(D3) Si $b\Lambda c$, aVb, aVc sont non vides
alors $aV(b\Lambda c) = (aVb) \Lambda (aVc)$

(D3*) Si bVc, $a\Lambda b$, $a\Lambda c$ sont non vides
alors $a\Lambda(bVc) = (a\Lambda b) \text{ V } (a\Lambda c)$

Proposition E1

(D2) ou ($D2^*$) impliquent (D1).

Démonstration

Il suffit de vérifier que par exemple (D2) implique (D1).
Considérons a, b, c, d_1, e_1 tels que

$d_1 \in a\Lambda b$, $d_1 \in a\Lambda c$

$e_1 \in aVb$, $e_1 \in aVc$

$a\Lambda c = \{d_1, d_2, \ldots d_p\}$

$bVa = \{e_1, e_2, \ldots e_q\}$

$bVc = \{f_1, f_2, \ldots f_r\}$

$bV(a\Lambda c) = m\{U(bVd_i)\}$

Il est clair que tous les éléments de bVd_i majorent b.
Or pour d_1 : $bVd_1 = \{b\}$ donc $m(U(bVd_i)) = \{b\}$ et $bV(a\Lambda c) = \{b\}$.
De même $(bVa) \Lambda (bVc) = M\{U(e_i \Lambda f_j)\}$
Or e_1 majore a, b, c donc e_1 majore un élément de bVc, soit f_1 par exemple.
Ainsi $e_1 \Lambda f_1 = \{f_1\}$.
$f_1 \in bVc$ donc f_1 majore b.
Mais par (D2) $b \in M\{U(e_i \Lambda f_j)\}$, donc $f_1 \leq b$.
Il s'ensuit que $f_1 = b$
Ainsi un élément de bVc égale b. C'est que $c \leq b$.
La symétrie des rôles de b et c conduit donc à $b = c$.

Proposition E2

Si le multitreillis est un ensemble ordonné d'interpolation, les propriétés (D1), (D2), ($D2^*$), (D3), ($D3^*$) sont équivalentes.

Démonstration

Nous montrons successivement
(D2) → (D1) → ($D2^*$) → (D2)

(D2) → (D1) est l'objet de la proposition précédente.

(D1) → (D2*)

Supposons que xVy, xΛz, yΛz soient non vides (donc soient réduites à un élément).

On peut utiliser (M) puisque (D1) → (M2) équivalent à (M) pour un EOI.

Adoptons alors les notations de l'EOI modulaire libre.

Il vient $e_1 V e_2 = e_1 V e_3 = e_2 V e_3$

$e_1 \Lambda e_2 = e_1 \Lambda e_3 = e_2 \Lambda e_3$

Donc $e_1 = e_2 = e_3$ par (D1)

Calculons $z\Lambda e_3$ et $z\Lambda e_1$

$z\Lambda e_3 = z\Lambda(a_3 V(e_1 \Lambda e_2))$

$= z\Lambda(a_3 V e_1)$

$= a_3 V(e_1 \Lambda z)$ par (M)

$= a_3 V v_1 V v_2$

$= a_3$

$= z\Lambda(xVy)$

$z\Lambda e_1 = z\Lambda b_1 \Lambda c_2$

$= z\Lambda(xVv_1)\Lambda c_2$

$= (v_1 V v_2)\Lambda c_2$ par (M)

$= v_1 V v_2$

$= (x\Lambda z)\ V\ (y\Lambda z)$

Donc on a (D2*)

Ce serait naturellement symétrique de démontrer (D2*) → (D1) → (D2).

Enfin (D3) et (D3*) sont naturellement équivalentes à (D2) et (D2*) pour un EOI.

Proposition E3

(D3) et (D3*) sont équivalentes et caractérisent un EOI distributif.

Démonstration

- (D3) → EOI

Supposons qu'on ait (D3) et soit $a \in b\Lambda c$

$aV(b\Lambda c) = \{a\}$

$(aVb) \Lambda (aVc) = b\Lambda c$

Donc $b\Lambda c$ est réduit au seul élément a.

- EOI et (D1) → (D3) et ($D3^*$). Ceci a été démontré en E2

Remarque

On pourrait vérifier aussi que (D3) et ($D3^*$) sont équivalentes à (D4).

(D4) : si aVb, aVc, bVc, $a\Lambda b$, $a\Lambda c$, $b\Lambda c$ sont non vides alors

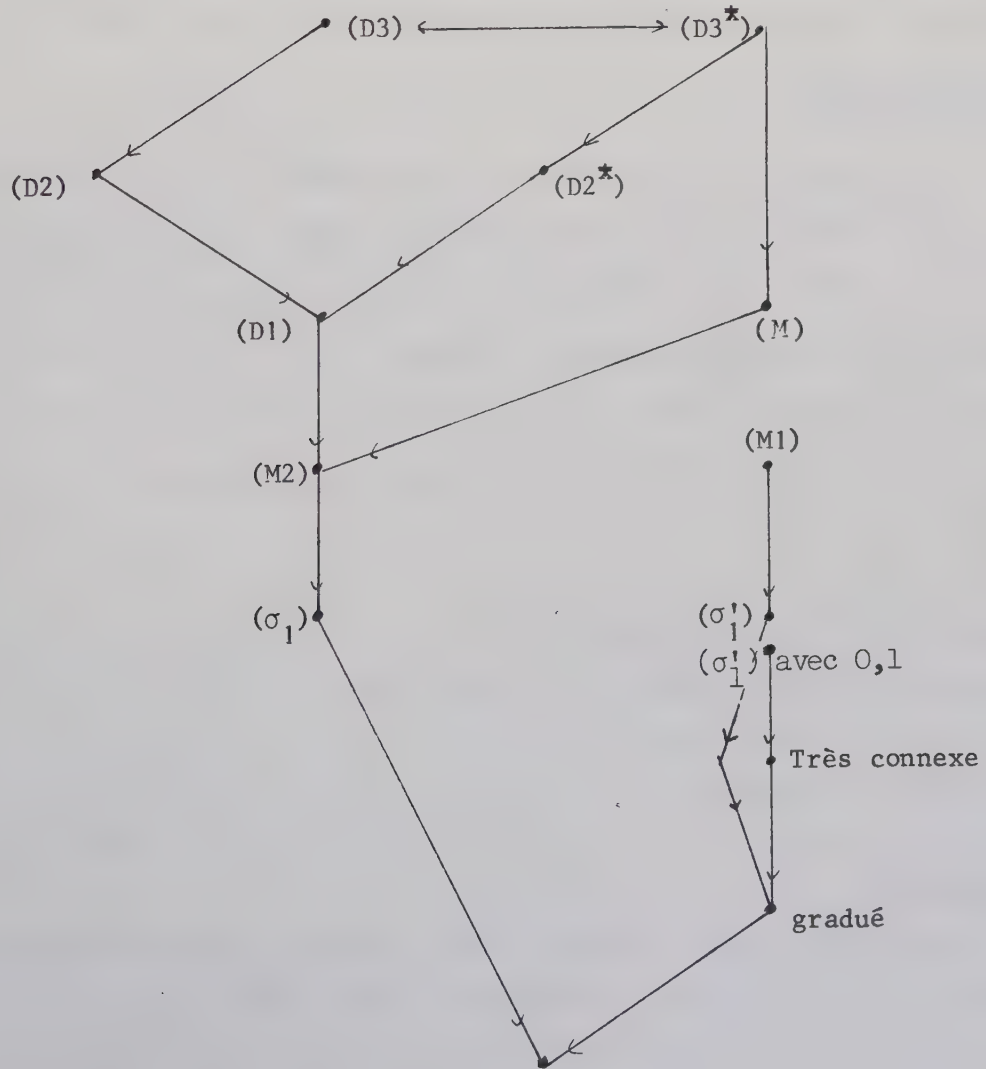
$(aVb) \Lambda (aVc) \Lambda (bVc) = (a\Lambda b) V (a\Lambda c) V (b\Lambda c)$.

Graphe des implications

Rappelons que les propriétés de semi-modularité supérieure au sens de G. Birkhoff et M. Benado sont respectivement notées (σ_1') et (σ_1)

Donnons ci-dessous le graphe des implications des multitreillis étudiés :

Figure 16



Quand on impose au multitreillis que chaque partie connexe ait un élément universel on a aussi l'implication $(\sigma_1) \rightarrow (\sigma_1')$.

Quand on impose en plus que chaque partie connexe ait un élément nul, on a aussi l'implication (M2) → (M1).

Enfin dans le cas d'EOI le graphe est très simplifé puisque la partie gauche devient (D1) → (M) → (σ_1)

Conservation par homomorphismes

Nous allons comme à propos des semi-modulaires examiner les homomorphismes quasi d'ordre strict et les homomorphismes pour l'union ou l'intersection.

Proposition E4

L'homomorphe quasi d'ordre strict de 2ème catégorie d'un multitreillis distributif au sens (D1) est un multitreillis distributif au sens (D1).

Démonstration

Soient $\phi(e) \in (\phi(a) \vee \phi(b)) \cap (\phi(a) \vee \phi(c))$
$\phi(d) \in (\phi(a) \wedge \phi(b)) \cap (\phi(a) \wedge \phi(c))$
avec $\phi(a) \neq \phi(b)$ et $\phi(a) \neq \phi(c)$

Notons $e_1, e_2, \ldots$ les éléments de $\phi^{-1}\ \phi(e)$
On trouve par C6 : $e_1 \in a \vee b$
Mais $\phi(c) \leq \phi(e)$ implique que $c \leq e_1$
Il existe donc $e_2 \in a \vee c$ tel que $e_2 \leq e_1$
Mais $\phi(b) \leq \phi(e)$ implique $b \leq e_2$
Donc il existe $e_3 \in a \vee b$ tel que $e_3 \leq e_2$
Par suite $e_1 = e_2 = e_3 \in (a \vee b) \cap (a \vee c)$
On trouvera de la même manière $d \in (a \wedge b) \cap (a \wedge c)$
Ainsi $b = c$ et $\phi(b) = \phi(c)$
L'homomorphe est distributif.

Remarques

1) L'homomorphe quasi d'ordre strict de 2ème catégorie d'un EOI distributif est un EOI distributif (conséquence de C12 et E4).

2) L'homomorphe quasi d'ordre strict de 1ère catégorie d'un multitreillis distributif au sens (D1) n'est pas nécessairement distributif au sens (D1).

Ainsi :

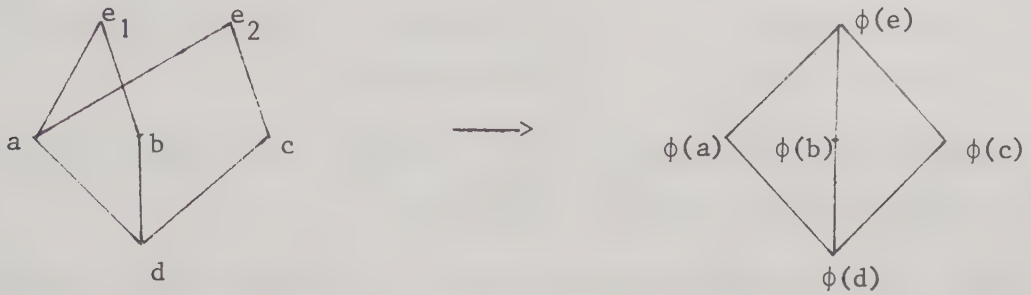


Figure 17

3) L'homomorphe de 2ème catégorie pour l'union d'un multitreillis distributif au sens (D1) n'est pas nécessairement distributif au sens (D1) comme le montre la figure duale de la figure 12.

Exemples de EOI distributifs

Treillis des sous-arbres d'un arbre

G. Boulaye [10] a étudié ce treillis. On remarque qu'en enlevant le O, on trouve un EOI distributif.

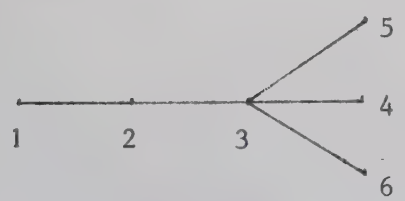
Rappelons deux définitions :

Arbre : graphe connexe sans cycle

Sous-arbre : sous-graphe connexe d'un arbre

A et B étant des sous-arbres, AVB est le plus petit sous-arbre contenant A et B. A∧B est le plus grand sous-arbre contenu dans A et B.

L'intersection est à prendre au sens ensembliste, contrairement à l'union.



Si A = {1, 2} B = {4}

AVB = {1, 2, 3, 4}

Figure 18

Il est clair que AV(B∧C) = (AVB) ∧ (AVC) dès que B∧C, AVB, AVC existent.

Couplages dans un graphe biparti

Rappelons qu'un graphe biparti est la donnée d'un ensemble X de sommets partitionné en 2 classes A et B et d'un ensemble U d'arcs dont l'origine est dans A, l'extrémité dans B.

Un couplage est une partie V de U telle que 2 arcs quelconques de V aient une origine et une extrémité différentes.

Ainsi, dans l'ensemble des couplages d'un graphe biparti donné, l'intersection existe toujours et est à prendre au sens ensembliste, l'union, si elle existe, est à prendre au sens ensembliste.

Finalement cet EOI est antiisomorphe à une algèbre d'implication caractérisée par J.C. Abbott [21] comme "ensemble ordonné dans lequel tout intervalle $[x, 1]$ est un treillis de Boole".

PREMIERE PARTIE

CHAPITRE III

Multitreillis pseudo-complémentés

A) MULTITREILLIS PSEUDO-COMPLEMENTE INFERIEUREMENT

On peut fort bien définir cette notion même quand le multitreillis n'a pas de O. Toutefois la nécessité de distinguer à tout moment le cas où il y en a et le cas où il n'y en a pas alourdirait l'exposé.

On considérera donc que le multitreillis M a un O. On note pour cette partie l'ensemble des atomes par AT et on pose $AT_x = I_x \cap AT$

Nous disons qu'un multitreillis M est pseudo-complémenté inférieurement (noté MPCI) si pour tout $x \in M$, il existe x_* tel que :

(A1) $\quad y \wedge x = \{0\} \leftrightarrow y \leq x_*$

On définit de même le multitreillis pseudo-complémenté supérieurement (MPCS).

L'élément x_* naturellement unique est appelé le pseudo-complément inférieur de x. Un MPCI possède un 1 puisque $0_* = 1$.

On a comme pour les treillis pseudo-complémentés inférieurement :

(A2) $\quad a \leq a_{**}$

(A3) $\quad a \leq b \rightarrow b_* \leq a_*$

(A4) $\quad a \leq b \rightarrow a_{**} \leq b_{**}$

(A5) $\quad a_{***} = a_*$

Si B est une partie de M, on note $B_* = \{b_* | b \in B\}$.

On a alors les formules ensemblistes correspondant aux formules précédentes :

(A2') $\quad A \amalg A_{**}$

(A3') $\quad A \perp B \rightarrow B_* \top A_*$

en effet si pour tout a il existe b tel que $a \leq b$, alors pour tout a, il existe b tel que $b_* \leq a_*$

(A3") $\quad A \top B \rightarrow B_* \perp A_*$

(A4') $\quad A \perp B \rightarrow A_{**} \perp B_{**}$

(A4") $\quad A \top B \rightarrow A_{**} \top B_{**}$

(A5') $\quad A_{***} = A_*$

(A6) $a = b_* \leftrightarrow a = a_{**}$

Toutes les propriétés démontrées pour des treillis pseudo-complémentés, mais qui ne font intervenir que les formules (A1) à (A6) précédentes s'appliquent encore aux multitreillis. C'est le cas de (A7), (A8).

(A7) $a = a_{**} \leftrightarrow \{a_* \leq b \rightarrow a \geq b_*\}$

$a = a_{**} \leftrightarrow \{a_* \leq b_* \rightarrow a \geq b\}$

énoncé par P.V. Venkatanarasimhan [35] à propos des semi-treillis pseudo-complémentés.

(A8) $a \wedge b = \{0\} \leftrightarrow a_{**} \wedge b_{**} = \{0\}$

énoncé par J. Varlet [34] à propos des treillis pseudo-complémentés.

Par ailleurs P.V. Venkatanarasimhan s'intéresse dans [36] aux ensembles ordonnés pseudo-complémentés.
Toutefois, il ne donne pas les formules ensemblistes, ne considérant que les cas où $a \vee b$, ou $a \wedge b$ ont un seul élément.

Formule (A9) : $a_* \wedge b_* = (a_* \wedge b_*)_{**}$

Démonstration

(1) $a_* \wedge b_* \amalg (a_* \wedge b_*)_{**}$ par (A2')

(2) $a_* \wedge b_* \perp a_*$

(3) $(a_* \wedge b_*)_{**} \perp a_{***} = a_*$ par (A4')

(4) $(a_* \wedge b_*)_{**} \perp b_*$

(5) $(a_* \wedge b_*)_{**} \perp a_* \wedge b_*$ par C3 du chapitre I

Il s'ensuit de (1) et (5) et du fait que $a_* \wedge b_*$ est une partie libre que $(a_* \wedge b_*)_{**}$ est aussi une partie libre et que $a_* \wedge b_* = (a_* \wedge b_*)_{**}$

Formule (A10): $a \wedge b \perp a_{**} \wedge b_{**}$

Formule (A11): $a_* \wedge b_* = M((a \vee b)_*)$

Démonstration

(1) $a \top a \vee b$

(2) $(a \vee b)_* \perp a_*$ par (1) et (A3')

(3) $(a \vee b)_* \perp b_*$ de la même manière

(4) $(a \vee b)_* \perp a_* \wedge b_*$ par I C3

(5) $a_* \wedge b_* \perp a_*$

(6) $a \leq a_{**} \top (a_* \wedge b_*)_*$ par (5) et (A3')

(7) $b \leq b_{**} \top (a_* \wedge b_*)_*$ de la même manière

(8) $a \vee b \top (a_* \wedge b_*)_*$ par I C3

(9) $(a_* \wedge b_*)_{**} \perp (a \vee b)_*$ par (A3")

(10) $a_* \wedge b_* = M((a \vee b)_*)$ par (4), (9) et (A9)

Remarque :

Si $(a \vee b)_*$ est une partie libre, il est clair que $a_* \wedge b_* = (a \vee b)_*$

Dans les treillis pseudo-complémentés inférieurement, on a aussi la formule $(a \wedge b)_* = (a_{**} \wedge b_{**})_*$

Cette formule n'est pas satisfaite dans les multitreillis comme on le voit dans l'exemple ci-dessous.

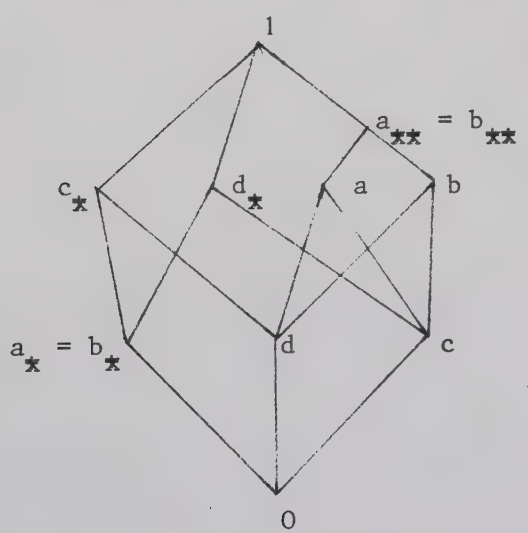


Figure 1

On dira que x est dense si x_* = 0. Soit D l'ensemble des éléments denses. On a alors :

Formule (A12) : $a_*Vb_* \subseteq D \leftrightarrow a\Lambda b = \{0\}$

Démonstration

$a_{**}\Lambda b_{**} = M((a_*Vb_*)_*)$ par A11.
Donc si $a\Lambda b = \{0\}$, $a_{**}\Lambda b_{**} = \{0\}$ par (A8)
et pour tout $d \in a_*Vb_*$, $d_* = 0$.
De même, si pour tout $d \in a_*Vb_*$, $d_* = 0$, on a $a_{**}\Lambda b_{**} = \{0\}$, puis $a\Lambda b = \{0\}$.

Formule (A13) : $(a_*Vb_*)\ T\ (a\Lambda b)_*$

Démonstration

(1) $a \Lambda b \perp a$

(2) $a_*\ T\ (a\Lambda b)_*$ par (A3')

(3) $b_*\ T\ (a\Lambda b)_*$ de la même manière

(4) $a_* V b_*\ T\ (a\Lambda b)_*$ par I 63

Multitreillis COE

On dira qu'un multitreillis avec 0 a la propriété de complément ensembliste des éléments (COE) si $\forall x\ \exists y$: $AT_y = AT - AT_x$.

Proposition A14

Un MPCI est COE

Démonstration

Dans un MPCI on a pour tout x : $AT_{x_*} = AT - AT_x$

En effet, il ne peut pas exister d'atome commun à x et x_*.
De plus si a ne minore pas x alors $a \wedge x = \{0\}$ donc $a \leq x_*$

Remarque :

La réciproque n'est pas vraie, comme le montre la figure suivante :

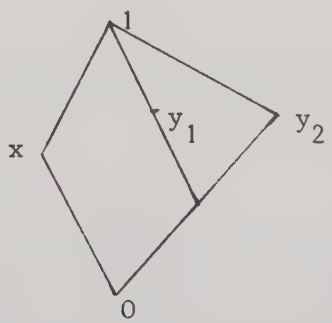


Figure 2

MPCI de Stone

Un MPCI est dit de Stone si pour tout x, $x_* \vee x_{**} = 1$.
Si 1 est l'union des atomes, le MPCI est clairement de Stone. La réciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple suivant :

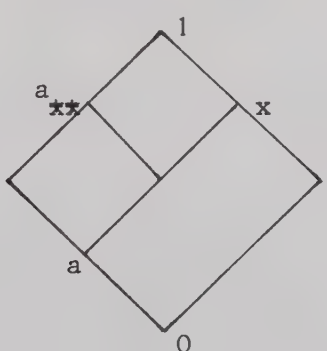


Figure 3

Distributivité et pseudo-complémentation

Il est clair qu'un treillis distributif fini est pseudo-complémenté puisque $a \wedge x = 0$ et $a \wedge y = 0 \rightarrow a \wedge (x \vee y) = 0$

On a la même propriété pour un multitreillis:

Théorème A15

Dans un multitreillis distributif avec 0, si $a \wedge x = \{0\}$ et $a \wedge y = \{0\}$, alors pour tout $z \in x \vee y$, on a : $a \wedge z = \{0\}$.

Démonstration

$a \wedge x = \{0\}$, $a \wedge y = \{0\}$.

On peut admettre, sans perdre de généralité que x et y sont distincts et non comparables.

Soit $z \in x \vee y$ et $b \in a \wedge z$.

Supposons que $b \neq 0$.

$b \wedge x = \{0\}$ et $b \wedge y = \{0\}$.

Le multitreillis étant distributif (définition (D1) en IIE) il n'est pas possible que $z \in (b \vee x) \cap (b \vee y)$.

Considérons donc que $z \notin b \vee x$

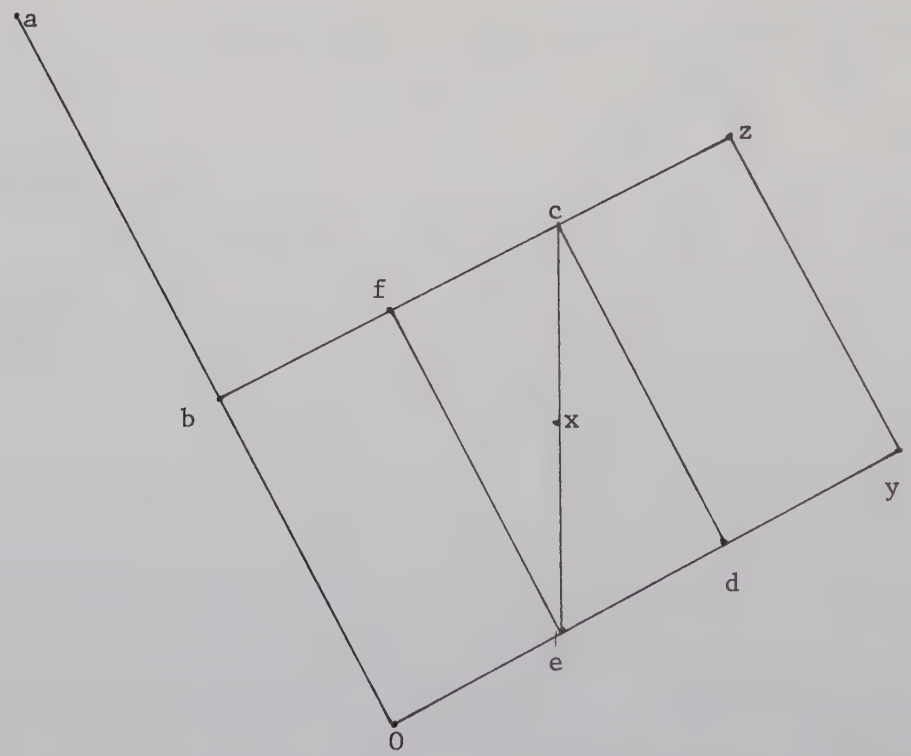


Figure 4

Puisque z majore b et x, il existe $c \in bVx$ tel que $c \leq z$.
c est distinct de x sinon on aurait $b \leq x$ ou $b = 0$ puisque $b \wedge x = \{0\}$, ce qui serait contraire à notre hypothèse $b \neq 0$.

Soit $e \in x \wedge y$.
Puisque $z \in (yVx) \cap (yVc)$ et $e \in y \wedge x$, on ne peut pas avoir, à cause de la distributivité : $e \in y \wedge c$.
Soit donc $d \in y \wedge c$, tel que $e < d$.
e minorant y et x et y étant incomparables, il s'ensuit que x et e sont distincts.
Puisque $b \wedge x = b \wedge e = \{0\}$ et $c \in bVx$, on ne peut pas avoir, à cause de la distributivité : $c \in bVe$.
Soit donc $f \in bVe$, tel que $f < c$.

Ayant la distributivité, on a la modularité au sens de M. Benado. Introduisons alors une graduation h.

$c \in bVx$, $b \wedge x = \{0\}$ donc $h(b) + h(x) = h(c)$
$z \in cVy$, $d \in c \wedge y$ donc $h(c) + h(y) = h(z) + h(d)$
$z \in xVy$, $e \in x \wedge y$ donc $h(z) + h(e) = h(x) + h(y)$
$f \in bVe$, $b \wedge e = \{0\}$ donc $h(f) = h(b) + h(e)$

En sommant, il vient : $h(f) = h(d)$

Il est clair que $c \in fVx$ puisque $c \in bVx$ et $b \leq f \leq c$.
e minore f et x donc il existe $g \in f \wedge x$, tel que $e \leq g$.

En sommant l'équation qui en résulte avec certaines des précédentes, il vient :

$$h(f) + h(x) = h(c) + h(z)$$
$$h(c) + h(y) = h(z) + h(d)$$
$$h(z) + h(e) = h(x) + h(y)$$
$$h(d) = h(f)$$

$$h(e) = h(g)$$

Donc $e = g \in f \wedge x$.

D'autre part $e \in x \wedge d$ puisque $e \in x \wedge y$ et $e \leq d \leq y$.
c majore x et d donc il existe $i \in xVd$ tel que $i \leq c$.

En sommant l'équation qui en résulte avec certaines des précédentes, il vient :

$$\begin{array}{l} h(x) + h(d) = h(i) + h(e) \\ h(c) + h(y) = h(z) + h(d) \\ h(z) + h(e) = h(x) + h(y) \end{array}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$h(c) = h(i)$$

Donc $c = i \in xVd$

Finalement

$c \in (xVf) \cap (xVd)$

$e \in (x\Lambda f) \cap (x\Lambda d)$

Donc, par la distributivité, $f = d$.

Or $b \in a\Lambda f$ donc $b \in a\Lambda d$ et puisque $a\Lambda d = \{0\}$, c'est que $b = 0$.

Corollaire A16

Un multitreillis distributif fini avec 0 (avec 1) est un MPCI (MPCS).

Corollaire A17

Dans un multitreillis distributif fini avec 0 et 1, si x a un complément x', alors $x' = x_*$ et $x = x_{**}$.

C'est une conséquence directe de A15 et du fait que le complément est nécessairement unique.

Théorème A18

Dans un multitreillis distributif fini avec 0 et 1, si a et b sont complémentés, alors aVb et $a\Lambda b$ sont composés d'un seul élément ; $a\Lambda b$ a pour complément $a'Vb'$ et aVb a pour complément $a'\Lambda b'$.

Démonstration

Admettons que a et b soient complémentés et soit $x \in a\Lambda b$.

$x\Lambda a' = \{0\}$

$x\Lambda b' = \{0\}$

Donc par A15 pour tout $y \in a'Vb'$ on a $x\Lambda y = \{0\}$.

Par dualité, puisque $yVa = \{1\}$, $yVb = \{1\}$, il est clair que $yVx = \{1\}$.

Donc tout $y \in a'Vb'$ est complément de tout $x \in a\Lambda b$.

Le complément étant unique par définition de la distributivité, il s'ensuit que $a\Lambda b$ et $a'Vb'$ sont composés d'un seul élément.

Il en va de même de aVb et $a'\Lambda b'$ par dualité.

B) CAS PARTICULIER DE MPCS : LE PSEUDO-TREILLIS DISTRIBUTIF

Une telle structure algébrique se trouve dans l'ouvrage de M.L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, R. Croisot [5] sous le nom de gerbier quasi entier, dans C. Benzaken [24] sous le nom de pseudo-treillis distributif, dans P. Robert, J. Ferland [31] sous le nom de Q semi-anneau.

Nous adopterons la terminologie de [24].

Un pseudo-treillis distributif (PTD) est un ensemble E muni de 2 opérations internes partout définies : la première notée + (et désignée par somme), la seconde notée par un point . (et désignée par produit) vérifiant les règles suivantes :

1) E est un V demi-treillis (associativité, commutativité et idempotence de V). On notera + l'opération de ce V demi-treillis.

2) E est un monoïde pour . (associativité du produit). En outre, le produit est distributif à droite et à gauche par rapport à la somme.

3) La règle d'absorption suivante est vérifiée :

$\forall a, \forall b \quad a + (a.b) = a + (b.a) = a$

Un tel pseudo-treillis distributif sera noté (E, +, .).
On ne considérera que des PTD finis munis d'éléments neutres 0 et 1 pour + et . respectivement.
On a naturellement :

$\forall a \quad a + 1 = 1 + a = 1 \; ; \; a.0 = 0.a = 0$

Exemples

PTD infinis classiques

- $(R_+, \inf, +_R)$ est utile pour la recherche des plus courts chemins dans un réseau.
- $(R_+, \sup, \inf)$ est utile pour la recherche des chemins de plus grande capacité.

Tout treillis distributif (T, V, Λ)

PTD de 3, 4, 5 éléments

3 éléments

Il y a 2 PTD distincts construits sur la chaîne à 3 éléments : 0, a, 1. L'un est tel que $a^2 = a$. L'autre est tel que $a^2 = 0$.

4 éléments

Il y en a 11 construits sur la chaîne à 4 éléments : $0 \prec a \prec b \prec 1$ dont les tables de multiplication sont :

	a	b
a	a	a
b	a	b

	a	b
a	0	a
b	a	b

	a	b
a	0	0
b	a	b

	a	b
a	0	a
b	0	b

	a	b
a	0	0
b	0	b

	a	b
a	a	a
b	a	a

	a	b
a	0	a
b	a	a

	a	b
a	0	0
b	a	a

	a	b
a	0	a
b	0	a

	a	b
a	0	0
b	0	a

	a	b
a	0	0
b	0	0

Il y en a un seul construit sur le treillis de Boole 2^2 d'atomes a et b :

	a	b
a	a	0
b	0	b

En effet $a + b = 1$, donc $a(a+b) = a$ ou $a^2 = a$ de même $b^2 = b$.

5 éléments

Il y en a un grand nombre qui soient totalement ordonnés
Il n'y en a aucun construit sur le treillis non modulaire à 5 éléments dont les chaînes sont $0 \prec a \prec 1$ et $0 \prec b \prec c \prec 1$.
En effet $a + b = 1$
donc $c.(a+b) = c$

$c.a + c.b = c$

$c.b = c$, ce qui est impossible, car $c.b \leq b$.

Il n'y en a aucun qui ait la forme du treillis modulaire non distributif à 5 éléments d'atomes a, b, c.
En effet a + b = 1

c.(a+b) = c

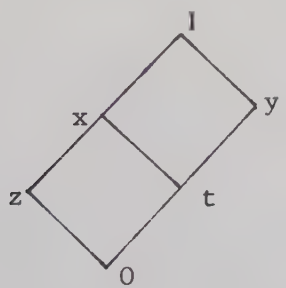
c.a + c.b = c

0 + 0 = c, ce qui impossible.

De manière plus générale, tout treillis qui a l'un des 2 dessins précédents pour sous treillis, de manière que l'élément maximum du sous-treillis soit l'élément universel du treillis, ne peut pas être un PTD même si l'élément minimum du sous-treillis n'est pas l'élément nul du treillis.

Enfin, il y a un grand nombre de PTD de 5 éléments comprenant 0, 1, un atome et deux coatomes.

On trouve dans l'ouvrage de M.L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, R. Croisot [5] le pseudo-treillis distributif suivant :



	x	z	t	y
x	z	z	0	t
z	z	z	0	0
t	0	0	0	t
y	t	0	t	y

Figure 5

Remarque :

Contrairement à C. Benzaken et J. Kuntzmann [2], nous n'imposerons pas que : x.y = 0 implique x = 0 ou y = 0.
Cette restriction, significative pour le cheminement, empêcherait en fait tout treillis d'au moins 2 atomes d'être un PTD.

Passage du treillis au PTD

Tout d'abord un PTD est un treillis ([5] p. 128) puisque c'est un V-demi treillis avec 0. La multiplication n'est en général pas l'intersection.

On a seulement $a.b \leq a$ $a.b \leq b$ donc $a.b \leq a \wedge b$

On aurait aussi $b.a \leq a \wedge b$ et $a.b + b.a \leq a \wedge b$.

On ne connaît pas de condition nécessaire et suffisante pour qu'un treillis soit un PTD. En dehors du treillis distributif qui est un cas particulier de PTD, on a :

Proposition B1

Tout treillis complet ayant un seul coatome est un PTD.

En effet, on écrit :

$a + b = a \vee b$

$a . 1 = 1 . a = a$

$a . b = 0$ si a et $b \neq 1$

Eléments premiers

On dira que x est premier dans un PTD si $x \neq 1$ et qu'il existe $y \neq 1$ tel que $x + y = 1$. C'est la définition duale de "non dense". On dit alors que x et y sont premiers entre eux. On appelle P l'ensemble des éléments premiers. D'abord il est clair que P est un semi-idéal supérieur.

Proposition B2 ([5] p. 140)

Si a et b sont premiers entre eux,

- $a.c \leq b$ implique $c \leq b$
- toute puissance de a et toute puissance de b sont premières entre elles,
- si de plus a et c sont premiers entre eux, alors a et b.c, ainsi que a et $b \wedge c$ sont premiers entre eux,
- $a \wedge b = a.b + b.a$

+-irréductibles de P

Proposition B3

- Les +-irréductibles de P sont idempotents.
- Soient $x, y \in P$, $x \leq y$ et x +-irréductible alors $x.y = y.x = x$.
- Les éléments minimaux de P sont +-irréductibles.

Démonstration

1) Soit x +-irréductible de P, alors il existe $y \neq 1$ tel que $x + y = 1$. Donc $x^2 + x.y = x$; x étant +-irréductible, on a $x^2 = x$ ou $x.y = x$; x et y étant incomparables, il vient : $x^2 = x$.

2) $x \leq y$ alors $x^2 \leq x.y \leq x$ d'où $x.y = x$

3) Soit $x + y \in P$ et $x \neq y$. Alors il existe z tel que $(x+y) + z = 1$.

On a deux cas : soit $x + z = 1$ et alors $x \in P$

soit $x + z \neq 1$ et alors $(x+z) + y = (x+y) + z = 1$

d'où $y \in P$

Finalement, il existe au moins un minorant de x + y qui appartienne à P. x+y n'est pas un élément minimal de P.

Idempotents

Soit I l'ensemble des idempotents d'un PTD appelé E.

Proposition B4

I est fermé pour +

En effet, $(x+y).(x+y) = x^2 + x.y + y.x + y^2 = x + y$

I est alors un demi-treillis pour + et possède un 0. C'est donc un treillis. Ce n'est en général pas un sous-PTD.

($a, b \in I \rightarrow a + b \in I$ mais $\not\rightarrow a.b \in I$) de E ni lui-même un PTD.

Proposition B5

Si E est commutatif, alors I est un PTD.

En effet, $a, b \in I \rightarrow (a.b).(a.b) = a.(b.a).b = (a.a).(b.b) = a.b$.

I est alors un sous-PTD de E et un PTD.

Proposition B6

Si les éléments de E sont tous idempotents, alors E est un treillis distributif :

En effet, si $x, y \in E$ et $z = x \wedge y$ est idempotent,

on a : $x \geq z$, $y \geq z$ $x.y \geq z^2 = z$. Or $x.y \leq x \wedge y$. Donc $x.y = x \wedge y$.

Treillis pseudo-complémenté supérieurement

Rappelons qu'un multitreillis avec 0 et 1 est pseudo-complémenté supérieurement si pour tout a, il existe a^* tel que

$$a \vee b = 1 \leftrightarrow b \geq a^*$$

Proposition B7

Un PTD est pseudo-complémenté supérieurement. De plus pour tout x, x^* est un idempotent.

Démonstration

Soit $x^* = \Pi\{y \mid x+y = 1\}$

Si $a + b = 1$, il est clair que $a^* \leq b$

Si maintenant $a^* \leq b$, on a: $a + b \geq a + a^*$

Or si c et d sont tels que $a + c = 1$, $a + d = 1$, alors $(a+c).(a+d) = 1$ ou $a^2 + a.c + a.d + c.d = 1$

En ajoutant a aux deux membres, il vient $a + c.d = 1$
Ceci démontre que $a + a^* = 1$ et du même coup que $a + b = 1$.
Il s'ensuit tout naturellement que x^* est idempotent.

Définition de x_*

Un PTD n'est pas nécessairement pseudo-complémenté inférieurement. Nous pouvons toutefois définir x_* par abus de notation

$$x_* = \Sigma\{y \mid x.y = 0\}$$

On peut aussi écrire $x.y = 0 \leftrightarrow y \leq x_*$ car on a

$x.x_* = 0$ par distributivité de . par rapport à + ., mais on n'a pas nécessairement $x \wedge x_* = 0$

Dans la suite, on supposera toujours, quand il sera question de a_* que la multiplication est commutative faute de quoi la plupart des propriétés sont fausses, à commencer par B9.

On a naturellement toutes les formules communes aux MPCS. On a en plus des formules propres à l'opération $a \to a_*$.

(B8) $a \leq b \rightarrow b_* \leq a_*,\ b^* \leq a^*$

(B9) $a^{**} \leq a \leq a_{**}$

(B10) $a^{***} = a^* \qquad a_{***} = a_*$

(B11) $0^* = 1 \qquad 1^* = 0$

$0_* = 1 \qquad 1_* = 0$

(B12) $(a^*+b^*) = (a^*+b^*)^{**}$ duale de (A9)

(B13) $(a^*+b^*) = (a \wedge b)^*$ tiré de O.Frink [28] et duale de (A11)

Nous donnons ci-dessous d'autres formules voisines de celle de O. Frink.

Formule B14 : $a^* + b^* = (a.b)^*$

Démonstration

- $a^* \leq (a.b)^*$ et $b^* \leq (a.b)^*$ par (B8)
  donc $a^* + b^* \leq (a.b)^*$

- D'autre part
  $(a+a^*+b^*).(b+a^*+b^*) = 1$

En développant, on obtient :

$a.b + aa^* + a.b^* + a^*.b + a^*.a^* + a^*.b^* + b^*.b + b^*.a^* + b^*.b^* = 1$

a^* et b^* sont idempotents et par absorption

$a^* + b^* + a.b = 1$ ou $(a.b)^* \leq a^* + b^*$

Formule B15 : $a_* \wedge b_* = (a_* \wedge b_*)_{**}$

Démonstration

- $a_* \wedge b_* \leq (a_* \wedge b_*)_{**}$
- $a_* \wedge b_* \leq a_*, \qquad a_* \wedge b_* \leq b_*$
  $(a_* \wedge b_*)_{**} \leq a_{***} = a_* \quad$ et $(a_* \wedge b_*)_{**} \leq b_*$
  d'où $(a_* \wedge b_*)_{**} \leq a_* \wedge b_*$

Formule B16 : $a_* \wedge b_* = (a+b)_*$

Démonstration

- $(a+b)_* \leq a_*$, $\quad (a+b)_* \leq b_* \quad$ donc $(a+b)_* \leq a_* \wedge b_*$
- $a \leq a_{**} \leq (a_* \wedge b_*)_*$

  $b \leq b_{**} \leq (a_* \wedge b_*)_*$

  $(a+b)_* \geq (a_* \wedge b_*)_{**} = a_* \wedge b_* \quad$ par B15

Formules B17

$$(a+b)^* = (a^{**}+b^{**})^*$$

$$(a+b)^* = (a^*.b^*)^{**} \leq (a^* \wedge b^*)^{**}$$

$$(a+b)^{**} = a^{**} + b^{**}$$

$$a_* + b_* \leq (a \wedge b)_* \leq (a.b)_*$$

La première est appelée propriété 17 dans O. Frink [28]. Les 2 suivantes en dérivent immédiatement. La dernière est évidente.

Fermetures et ouvertures liées à a^* et a_*

Nous allons voir que l'application $a \to a^- = a_{**}$ est une fermeture, et $a \to a^o = a^{**}$ est une ouverture.

On a :

Formules B18

1) $a \leq b \to a^- \leq b^-$ et $a^o \leq b^o$

2) $a^o \leq a \leq a^-$

3) $a^{--} = a^-$ et $a^{oo} = a^o$

4) $(a+b)^o = a^o+b^o \quad$ par B17

5) $a^- + b^- \leq (a+b)^- \quad$ par B16 et B17

   $(a \wedge b)^o = (a.b)^o \leq a^o.b^o \leq a^o \wedge b^o \quad$ par B13 et B14

6) $0^- = 0^o = 0 \qquad 1^- = 1^o = 1$

7) $a^{-} = \Lambda \{x | x = x^{-} \geq a\}$ $a^{o} = \Sigma \{x | x = x^{o} \leq a\}$

8) $a^{-o-o} = a^{-o}$ $a^{o-o-} = a^{o-}$

Vérifions seulement 8), les autres propositions étant évidentes

$a^{-o} \leq a^{-o-}$ implique $a^{-o} = a^{-oo} \leq a^{-o-o}$

$a^{-o} \leq a^{-}$ implique $a^{-o-o} \leq a^{--o} = a^{-o}$

Classes d'équivalence attachées à l'ouverture $x \to x^{o}$

On écrit $a \equiv b$ si $a^{o} = b^{o}$ et on appelle ouvert un élément de la forme a^{o}.

On a les propriétés suivantes :

B19) $a \equiv b$ si et seulement si $a^{*} = b^{*}$

B20) La relation d'équivalence est une congruence pour les 3 opérations $+$, $.$, Λ.

Soit en effet $a \equiv b$

$(a+c)^{o} = a^{o}+c^{o} = b^{o}+c^{o} = (b+c)^{o}$ par B18, 4)

$(a.c)^{o} = (a^{*}+c^{*})^{*} = (b^{*}+c^{*})^{*} = (b.c)^{o}$ par B14

$(a\Lambda c)^{o} = (b\Lambda c)^{o}$ par B13

Il s'ensuit immédiatement que :

B21) Les classes d'équivalence sont des segments de E.

B22) Un élément est ouvert si et seulement si il est minimum dans sa classe.

B23) L'application $a \to a^{o}$ est un homomorphisme d'ordre de 1ère catégorie successivement par rapport aux deux variables de E dans $E/\equiv$.

α) Si $a \leq b$, alors $a^{o} \leq b^{o}$

β) Si $a^{o} \leq b^{o}$ et $a \equiv a^{o}$, on trouve $b = a + b^{o}$ qui est équivalent à b^{o} et $\geq a$.

γ) Si $a^{o} \leq b^{o}$ et $b \equiv b^{o}$, on trouve $a = a^{o} \Lambda b$ qui est équivalent à a^{o} et $\leq b$.

On trouve dans l'ouvrage de M.L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, R. Croisot [3] page 179, la démonstration du fait que si $\equiv$ est une congruence dans un groupoïde, alors l'application est FRS. Or la notion de FRS est la notion d'homomorphisme d'ordre de 1ère catégorie par rapport à la variable inférieure.

B24) $E/\equiv$ est un treillis de Boole dont le 0 est $\mathcal{C}P$.
O. Frink montre que ce quotient est un treillis de Boole dans un treillis pseudo-complémenté. La classe de 0 dans E est l'ensemble des éléments tels que $x^{**} = 0$ ou $x^{*} = 1$, donc des éléments non premiers.

Classes d'équivalence attachées à la fermeture $x \to \bar{x}$

On écrit $a \equiv b$ si $\bar{a} = \bar{b}$ et on appelle fermé un élément de la forme $\bar{a}$.

B25) $a \equiv b$ si et seulement si $a_* = b_*$

B26) La relation d'équivalence est une congruence pour +
$a \equiv b \to (a+c)_{**} = (a_* \wedge c_*)_* = (b_* \wedge c_*)_* = (b+c)_{**}$ par B16 et B25.

B27) Les classes d'équivalence sont fermées pour +.

B28) Un élément est fermé si et seulement si il est maximum dans sa classe.

B29) L'application $a \to \bar{a}$ est un homomorphisme d'ordre de 1ère catégorie par rapport à la variable inférieure.

B30) $E/\equiv$ est un treillis.
En effet 1 est un fermé et l'intersection de 2 fermés est un fermé (B15).

PREMIERE PARTIE

CHAPITRE IV

Multitreillis complémentés

A) MULTITREILLIS COMPLEMENTES

Nous allons rappeler la définition de chaque forme de complémentation donnée par P.A. Grillet et J.C. Varlet [29] à propos des treillis, examiner si on trouve les mêmes implications pour un multitreillis puis présenter d'autres formes de complémentation.

Ces dernières s'articulent autour de l'idée suivante :
"Les fermés d'un treillis pseudo-complémenté forment un treillis de Boole. Les fermés d'un multitreillis pseudo-complémenté forment un multitreillis qui a une définition voisine de celle d'un treillis de Boole".

Un tel objet sera appelé multi-treillis de Boole. On verra comment il se situe par rapport aux autres formes de complémentation.

On considérera que les multitreillis ont un 0 et un 1.

Un complément x' de x est un élément tel que :
$x \vee x' = \{1\}$, $x \wedge x' = \{0\}$.

Un multitreillis est complémenté (C) si tout élément admet un complément.

Il est unicomplémenté (UC) si tout élément admet un complément unique.

Il est relativement complémenté (RC) si tout intervalle est complémenté.

M. Benado [23] a montré que les multitreillis distributifs complémentés ou relativement unicomplémentés (RUC) étaient des treillis de Boole (TB).

Un multitreillis est section complémenté (SeC) si tout intervalle de la forme $[0, x]$ est complémenté.

On parlera aussi de section unicomplémenté (SeUC).

Un multitreillis est orthocomplémenté (OC) s'il admet un automorphisme dual $x \to x'$ tel que $x \wedge x' = \{0\}$.

Il est semi-complémenté (SC) si pour tout $a \neq 1$, il existe $b \neq 0$, tel que $a \wedge b = \{0\}$.

Il est faiblement complémenté (WC) si pour tout couple a, b tel que $a < b$, il existe c tel que $a \wedge c = \{0\}$ et $b \wedge c \neq \{0\}$.

On peut par ailleurs généraliser la notion de treillis atomique définie par M. Barbut et B. Monjardet [1] en disant que x est borne supérieure d'atomes si $x \in \vee \{a \mid a \in AT_x\}$.

Un multitreillis est atomique si tous ses éléments sont bornes supérieures d'atomes.

Les notions "atomique" et "faiblement complémenté" sont évidemment équivalentes.

Les notions "1 est borne supérieure d'atomes" et "semi-complémenté" sont aussi équivalentes.

Introduisons enfin les définitions :

Un multitreillis est un multi-treillis de Boole (MTB) s'il existe une opération univoque $x \to x'$ telle que

$$a \wedge b' = \{0\} \leftrightarrow a \leq b$$

Nous avions initialement appelé ces objets des quasi-treillis de Boole. La lecture d'un article de C. De Barros [22] qui les appelle "ordered boolean systems" nous a fait modifier le nom. C. De Barros les présente très différemment, ne s'intéressant pas au fait que b' est un complément de b et non seulement un pseudo-complément et ne les intégrant pas dans une hiérarchie des définitions des formes de complémentation.

Un multitreillis immergeable (IM) est défini par : $AT_x \subseteq AT_y \to x \leq y$

Rappelons la définition de la propriété de complément ensembliste des éléments (COE) :

pour tout x, il existe y : $AT_y = AT - AT_x$

Enfin un multitreillis a la propriété de complément ensembliste des atomes (COA) si pour tout atome a, il existe y : $AT_y = AT - AT_a$

Théorème A1

Les formes de complémentation ainsi définies obéissent aux implications exprimées par le schéma ci-dessous.

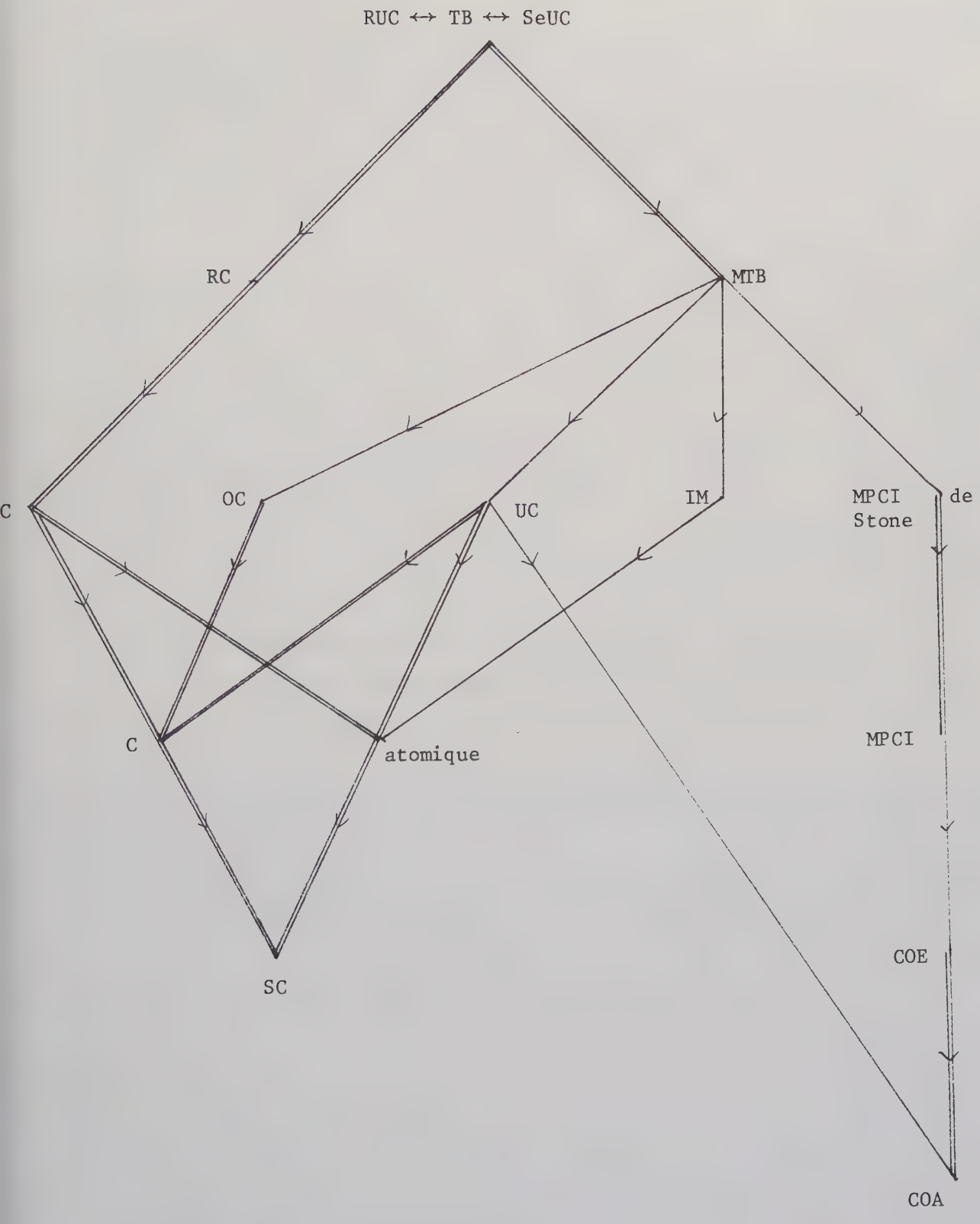

RUC ↔ TB ↔ SeUC
RC
MTB
C
OC
UC
IM
MPCI
Stone
de
C
atomique
MPCI
SC
COE
COA

Figure 1

Démonstration

Les implications exprimées dans le graphe précédent par un trait double sont évidentes :

TB → RC
TB → MTB
RC → SeC
SeC → C
SeC → atomique
OC → C
UC → C
UC → atomique
C → SC
atomique → SC
MPCI de Stone → MPCI
COE → COA

Ces implications sont sensiblement celles données par P.A. Grillet et J.C. Varlet [29]. Dans les treillis finis il est clair que :

UC → TB.

Il n'en est pas de même ici, par contre on a

SeUC → TB

dans le cas fini.

SeUC → treillis de Boole

Soit T un multitreillis section unicomplémenté de n atomes. Considérons l'application ϕ de T dans 2^n définie par :

$\phi(x) = AT_x$

- ϕ est bijective

Soit une chaîne $o \prec p_1 \prec p_2 \dots \prec p_s = 1$

On fait une récurrence sur la propriété suivante :

"Pour i donné: $card(AT_{p_i}) = i$ et pour tout $B \subseteq AT_{p_i}$, il existe q unique tel que $q \leq p_i$ et $AT_q = B$"

La propriété est vraie pour i = 1.

Supposons la vraie pour i et considérons l'intervalle $[0, p_{i+1}]$ qui est unicomplémenté par hypothèse.

On fait une nouvelle récurrence sur la propriété :
"Pour tout $B \subseteq AT_{p_{i+1}}$ tel que $\text{card}(B) \leq K$, il existe $q \leq p_{i+1}$ tel que $AT_q = B$".

C'est vrai pour K = 1 puisque le complément unique de p_i dans $[0, p_{i+1}]$ est un atome qu'on note p_i' . $AT_{p_{i+1}} = AT_{p_i} \cup \{p_i'\}$.

Supposons la vraie pour K et soit une partie B de K+1 éléments incluse dans $AT_{p_{i+1}}$.

Si $B \subseteq AT_{p_i}$ la propriété est vraie par récurrence sur i.

Amettons donc que $B \not\subseteq AT_{p_i}$ ou $p_i' \in B$.

Considérons x tel que $AT_x = AT_{p_{i+1}} - B$: x existe par hypothèse de récurrence sur i.

Soit x' le complément de x dans $[0, p_{i+1}]$

$$AT_{x'} \subseteq AT_{p_{i+1}} - AT_x = B$$

Si on a l'égalité on a trouvé $q = x'$ tel que $AT_q = B$. On considère alors un autre B de K+1 éléments et on peut faire progresser la récurrence sur K.

Si on n'a pas l'égalité, considérons le cas où $p_i' \in AT_{x'}$, alors il existe déjà q dans $[0, p_i]$ tel que $AT_q = AT_{p_{i+1}} - AT_{x'}$ par récurrence sur i. Dès lors, x' a 2 compléments q et x dans $[0, p_{i+1}]$ ce qui est impossible.

Il reste donc à examiner le cas où $p_i' \notin AT_{x'}$.

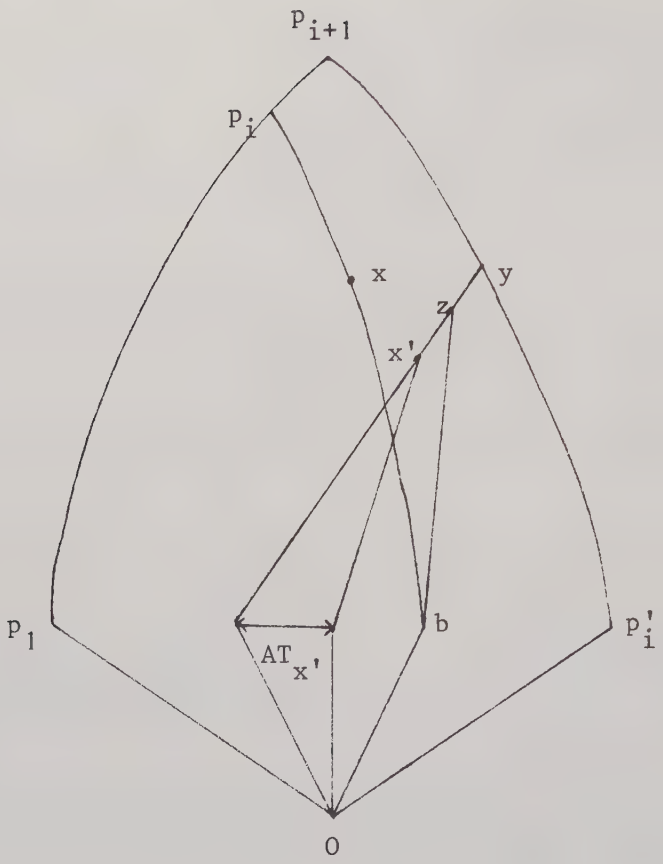


Figure 2

Soit $y \in p_i' \vee x'$, tel que $y \leq p_{i+1}$.

Il est clair que $p_{i+1} \in x \vee y$.

Puisque le complément de x est unique, c'est que $y \wedge x \neq \{0\}$.

Soit un atome $b \in y \wedge x$ et $z \in b \vee x'$, $z \leq y$.

1er cas : $z = y$

Alors b est complément de x' dans $[0, y]$, d'où $b = p_i'$. On ne peut donc pas trouver d'atome $b \in y \wedge x$. C'est en contradiction avec le fait que $y \wedge x \neq \{0\}$.

2ème cas : $z < y$

Alors $p_i' \not\leq z$. Donc z et x' sont 2 compléments de p_i' dans $[0, y]$. C'est en contradiction avec l'hypothèse d'unicomplémentation.

Finalement on est contraint d'admettre que $AT_{x'} = B$. La récurrence sur K peut donc progresser.

Donc pour tout $B \subseteq AT_{p_{i+1}}$ il existe q tel que $AT_q = B$.
q est nécessairement unique, sinon son complément q' dans $[0, p_{i+1}]$ aurait plusieurs compléments.

Ainsi la récurrence sur i peut progresser :

- ϕ est évidemment croissante.

- Si $AT_x \subseteq AT_y$ la propriété sur laquelle on vient de faire une récurrence montre qu'il existe $z \leq y$ tel que $AT_z = AT_x$ et z unique. On a donc $z = x \leq y$
Ainsi ϕ est un isomorphisme, et un SeUC est un treillis de Boole.

MTB → UC

O. Frink [27] montre que quand un demi-treillis possède une opération univoque $a \to a'$ et est tel que, pour un élément particulier noté 0, on a pour tout a, b : $a \wedge b' = \{0\} \leftrightarrow a \leq b$, c'est un treillis de Boole. Remplaçons demi-treillis par multi-treillis. Nous considérons donc un multitreillis ayant un élément particulier 0 et une opération univoque $a \to a'$ telle que 1°) soit satisfait.

1°) $a \wedge b' = \{0\} \leftrightarrow a \leq b$
A partir d'axiomes voisins de ceux de O. Frink, L. Byrne [25] démontre l'unicomplémentation. Voyons comment sa démonstration s'applique à cette structure.
2°) $a \leq a$ donc $a \wedge a' = \{0\}$ donc $\forall a : 0 \leq a$ et 0 est l'élément nul.

3°) $a' \wedge a'' = \{0\}$

4°) $a'' \leq a$ par 1°) et 3°)

5°) $a''' \leq a'$ par 4°) en remplaçant a par a'

6°) $a'''' \leq a''$ par 4°) en remplaçant a par a''

7°) $a'''' \leq a$ par 4°) et 6°)

8°) $a'''' \wedge a' = \{0\}$ par 7°) et 1°)

9°) $a' \leq a'''$ par 8°) et 1°)

10°) $a' = a'''$ par 5°) et 9°)

11°) $a \wedge a''' = \{0\}$ par 2°) et 10°)

12°) $a \leq a''$ par 11°) et 1°)

13°) $a = a''$ par 4°) et 12°)

Donc l'application $a \to a'$ est injective.

Montrons maintenant que $a \vee a' = \{0'\}$. Notons $0' = 1$.

14°) $0'' = 0$ par 13°)

15°) $x \wedge 0'' = \{0\}$ par 2°)

16°) $x \leq 0'$ par 15°) et 1°)

Donc 1 est élément universel.

Soit $a \leq z$, $a' \leq z$.

17°) $a \wedge z' = \{0\}$ par 1°)

18°) $a' \wedge z' = \{0\}$ par 1°)

19°) $z' \wedge a'' = \{0\}$ par 17°) et 13°)

20°) $z' \leq a'$ par 19°) et 1°)

21°) $z' = 0$ par 18°) et 20°)

22°) $z = 1$ par 21°)

On a donc un multi-treillis complémenté où a' est complément de a. Il reste à vérifier qu'il n'y a pas d'autres compléments. Soit x un complément de a.

23°) $x \wedge a = \{0\}$

24°) $x \wedge a'' = \{0\}$ par 23°) et 13°)

25°) $x \leq a'$ par 24°) et 1°)

Soit $t \leq x'$, $t \leq a'$

26°) $t \leq x'$

27°) $t \wedge x = \{0\}$ par 26°) et 1°)

28°) $t \leq a'$

29°) $t \wedge a = \{0\}$ par 28°) et 1°)

30°) $x \leq t'$ par 27°) et 1°)

31°) $a \leq t'$ par 29°) et 1°)

32°) $t' = 1$ par 30°) et 31°) et $x \vee a = \{1\}$

33°) $t = 0$ par 32°)

34°) $x' \wedge a' = \{0\}$ par 33°)

35°) $a' \leq x$ par 34°) et 1°)

36°) $a' = x$ par 25°) et 35°)

Le multi-treillis est donc bien unicomplémenté.

MTB → IM

Si $AT_x \subseteq AT_y$ on a $y' \wedge x = \{0\}$. Il s'ensuit que $x \leq y$.

MTB → OC

L'application $x \to x'$ est évidemment un automorphisme dual puisque $x \leq y$ implique $x \wedge y' = \{0\}$ donc $y' \leq x'$.

MTB → MPCI de Stone

L'application $x \to x'$ étant injective, un MTB est un MPCI de Stone dans lequel $x_* = x'$ pour tout x.

IM → atomique

Soit $x \neq 0$. x majore tous les atomes de AT_x donc x majore un y appartenant à $\vee \{a \mid a \in AT_x\}$.

$AT_x = AT_y$ donc $x \leq y$ et $y \leq x$ et $y = x$: x est borne supérieure d'atomes.

UC → COA

Si a est un atome, le complément a' est évidemment un coatome. S'il existe un atome $b \neq a$ tel que $b \notin AT_{a'}$, alors b est complément de a' qui se trouve alors avoir 2 compléments.
Donc $AT_{a'} = AT - \{a\}$.

MPCI → COE

Ceci a été vu en A) du chapitre III

Pour terminer l'étude du graphe des implications, il faut enfin vérifier que les implications écrites sont les seules.
Certains contre-exemples peuvent même être construits avec des treillis finis.

Vérifions d'abord que les éléments incomparables sont distincts.

MTB $\not\longrightarrow$ SeC — Dans le cas des treillis MTB → TB → SeC.
Prenons le treillis des parties de {a, b, c, d} et enlevons les parties {a, b} et {c, d}. On obtient un MTB comme on le verra au théorème A3, g. Ce MTB n'est pas SeC car dans la section $[0, \{a, b, c\}]$, {c} n'est pas complémenté.

RC $\not\longrightarrow$ OC — L'implication est déjà fausse dans les treillis finis. A l'aide du produit contracté qu'on présentera dans la seconde partie, on verra l'exemple de $2^2 * 2^2$ qui est RC, non OC.

RC $\not\longrightarrow$ IM — Dans les treillis finis, RC impliquerait IM. Il n'en est pas de même dans les multitreillis comme on le voit sur la figure 3.

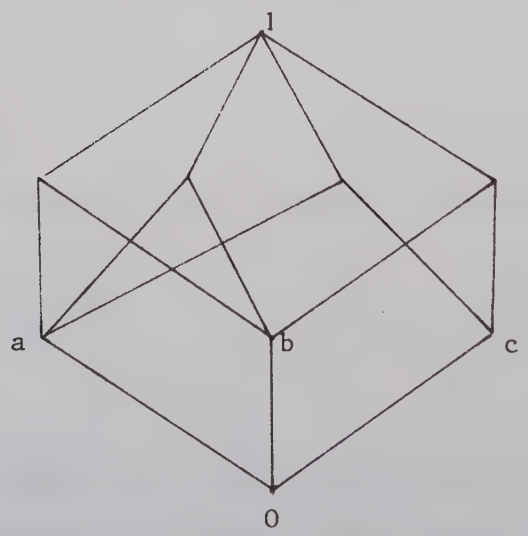


Figure 3

RC $\not\longrightarrow$ COA L'implication est déjà fausse dans les treillis finis. A l'aide du produit contracté, de la seconde partie, on peut construire $2^2 \star 2^3$ qui a 6 atomes et 5 coatomes.

OC $\not\longrightarrow$ atomique L'implication est déjà fausse dans les treillis comme on le verrait sur le treillis à 10 éléments : 0, 1, 4 atomes, 4 coatomes où chaque coatome ne majore qu'un atome.

OC $\not\longrightarrow$ COA L'implication est déjà fausse dans les treillis comme le montre le même contre-exemple.

UC $\not\longrightarrow$ IM L'implication serait vraie dans les treillis finis. Elle ne l'est pas dans les multitreillis comme le montre la figure 4.

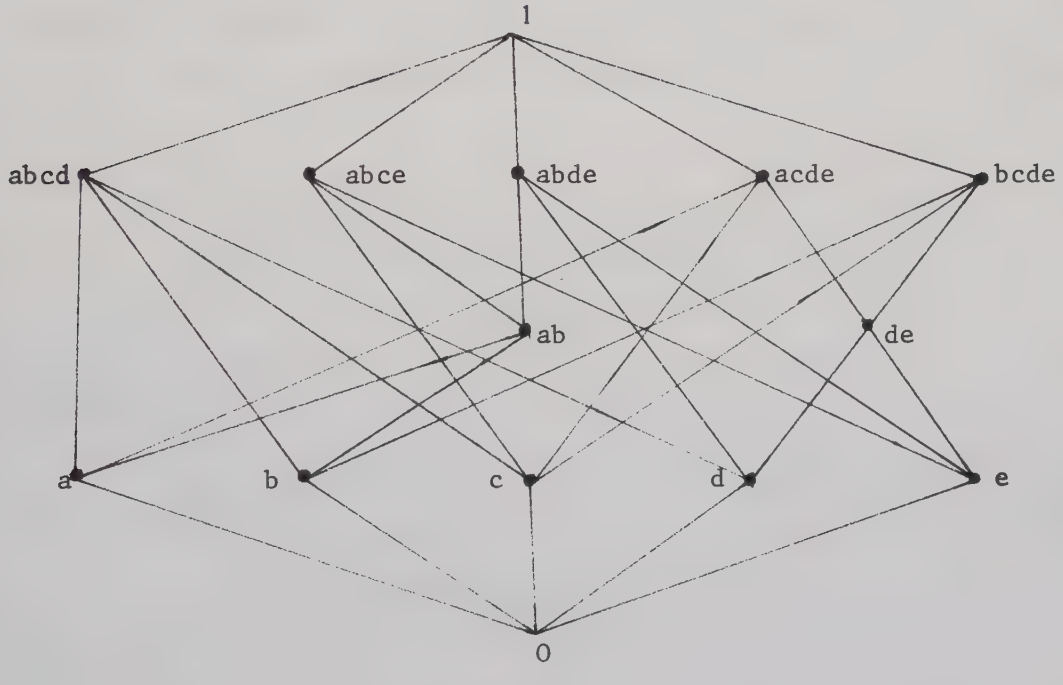


Figure 4

L'élément qui majore les atomes a et b étant incomparable à l'élément qui majore les atomes a, b, c, d, le multitreillis n'est pas IM.

UC $\not\longrightarrow$ COE On prend le même contre-exemple.

UC $\not\longrightarrow$ OC On prend le même contre-exemple.

IM $\not\longrightarrow$ C L'implication est déjà fausse dans les treillis.
On pourrait, pour s'en rendre compte, prendre le treillis induit à partir du treillis des parties de {a, b, c} en enlevant la partie {b, c}.

IM $\not\longrightarrow$ COA On prend le même contre exemple.

MPCI de Stone $\not\longrightarrow$ SC
On prend comme contre-exemple la figure 3 du chapitre III.

Il reste à vérifier que les implications sont strictes.
Si dans la figure 1, ϕ est Λ-réductible, c'est à dire que ϕ implique sans intermédiaire ψ et χ, il est clair qu'on ne peut avoir $\psi \to \phi$ ou $\chi \to \phi$ puisqu'on vient de vérifier que $\psi \not\longrightarrow \chi$ et $\chi \not\longrightarrow \psi$. Il reste donc le cas des Λ-irréductibles.

SeC $\not\longrightarrow$ RC L'implication est déjà fausse pour les treillis finis.

C $\not\longrightarrow$ OC " " " " " "

SC $\not\longrightarrow$ C " " " " " "

SC $\not\longrightarrow$ atomique " " " " " "

atomique $\not\longrightarrow$ IM Dans un treillis : atomique entraînerait IM.
Il n'en est pas de même dans les multitreillis comme le montre la figure 3.

MPCI $\not\longrightarrow$ MPCI de Stone
L'implication est déjà fausse pour les treillis.

COE $\not\longrightarrow$ MPCI Les 2 notions sont les mêmes pour un treillis. La figure 3 montre qu'il n'en est pas ainsi pour un multitreillis.

COA $\not\longrightarrow$ COE L'implication est déjà fausse pour les treillis.

Caractérisation des MTB

Nous avons déjà dit que les MTB avaient été définis par C. De Barros [22] qui ne s'intéresse pas au fait que le pseudo-complément inférieur est en même temps pseudo-complément supérieur et aussi complément.
Rappelons ses caractérisations :
Un ensemble ordonné a la propriété de disjonction s'il a un élément nul 0 et si pour x, y tels que $x \not\leq y$, il existe $b \neq 0$ tel que $b \leq x$ et $b \wedge y = \{0\}$.

Théorème A2 (C. De Barros)

Les propriétés suivantes sont équivalentes entre elles pour un multitreillis M.

a) M est un multitreillis de Boole.
b) M est MPCI et pour tout $x \in M$, on a : $x = x_{**}$
c) M a la propriété de disjonction et il existe une application univoque $x \to x'$ telle que pour chaque x : $x \wedge x' = \{0\}$, et $a \wedge x = a \wedge x' = \{0\}$ implique $a = 0$.
d) M est MPCI et WC.

Donnons maintenant des caractérisations originales dont l'une permettra de construire les MTB à partir des treillis de Boole.

Théorème A3

Les propriétés suivantes sont équivalentes entre elles pour un multitreillis M

a) M est un multitreillis de Boole.
e) M est IM et COE
f) M est IM, C et COA
g) M est obtenu à partir d'un treillis de Boole 2^n en enlevant une partie ne contenant ni atomes, ni coatomes, mais contenant avec chaque élément son complément et en gardant l'ordre induit.

Démonstration

Etant données les implications du théorème A1 et les équivalences de A2, il reste seulement à montrer, par exemple $e \to a$, $f \to e$, $g \to a$ et $a \to g$.

e → a

Soit un multitreillis ayant les propriétés IM et COE.

x' est défini comme un élément y tel que $AT_y = AT - AT_x$.

Il est clair que $x \wedge x' = \{0\}$.

Si $a \leq b$, alors $a \wedge b' = \{0\}$.

Si $a \wedge b' = \{0\}$, alors $AT_a \subseteq AT_b$ par définition de b', donc $a \leq b$ par IM.

C'est bien un MTB.

f → e

Soit un multitreillis ayant les propriétés IM, C et COA.

On a pour un complément x' de x ; $AT_{x'} \subseteq AT - AT_x$.

S'il existe un atome a qui ne minore ni x, ni x', alors par COA, on a $AT_x \subseteq AT_{a'}$, $AT_{x'} \subseteq AT_{a'}$.

Par IM ceci entraîne $x \leq a'$, $x' \leq a'$, ce qui est impossible, donc on a $AT_{x'} = AT - AT_x$, c'est à dire COE.

g → a

Soit un treillis de Boole 2^n. On enlève une partie ne contenant pas d'atomes, mais contenant, avec chaque élément, son complément. Soit S la partie restante, munie de l'ordre induit, et $x, y \in S$. Donc $x', y' \in S$.

Si $x \leq y$, il est clair que $x \wedge y' = \{0\}$.

Si $x \wedge y' = \{0\}$ la conclusion $x \leq y$ vient du fait qu'on est dans une partie d'un treillis de Boole et que $y \in S$.

a → g

Nous avons déjà montré que MTB → IM. Nous démontrerons, au théorème A8, qu'un multitreillis IM peut s'immerger dans $2^{\text{card}(AT)}$. Ayant aussi UC puisque MTB → UC, nous aurons montré a → g.

Parmi les 4 propriétés qui couvrent MTB dans le graphe du théorème 1, on peut penser que la conjonction de 2 quelconques d'entre elles implique MTB.

En effet WC et MPCI → MTB

donc UC et MPCI de Stone → MTB

IM et MPCI de Stone → MTB

Mais, même dans un treillis, on a :

OC et MPCI de Stone $\not\longrightarrow$ MTB

La question reste ouverte pour

OC et UC

OC et IM

UC et IM

Corollaire A4

Les fermés d'un MPCI forment un MTB pour la relation d'ordre induite. L'application $a \to a_{**}$ est une bijection entre l'ensemble des atomes du MPCI et l'ensemble des atomes du MTB.

Démonstration

La première partie de cet énoncé est une conséquence immédiate de b) du théorème A2)

Il reste à montrer maintenant que si a est un atome, l'application $a \to a_{**}$ est injective.

Ceci est une conséquence de A8 où on a vu que

$$a_{**} \wedge b_{**} = \{0\} \leftrightarrow a \wedge b = \{0\}.$$

Théorème A5

Un multitreillis OC (et donc un MTB) possède les lois de De Morgan :

$(a \vee b)' = a' \wedge b'$

$(a \wedge b)' = a' \vee b'$

Démonstration

Si $x' \in (a \vee b)'$ on a $x \geq a$, $x \geq b$ donc $x' \leq a'$, $x' \leq b'$.

Soit $y \in a' \wedge b'$: $x' \leq y$.

Alors $a, b \leq y' \leq x$. Donc $y' = x$ et $x' = y$.

Ainsi $(a \vee b)' \subseteq a' \wedge b'$.

L'inclusion inverse et la seconde égalité s'obtiennent par un raisonnement similaire.

Proposition A6

Dans un MTB, si $0 \prec x_1 \prec x_2 \ldots \prec x_n = 1$, alors $0 \prec x'_{n-1} \prec x'_{n-2} \ldots \quad x'_1 \prec 1$ et pour chaque i la branche $x_{i+1}|x_i$ est T-semblable d'en bas à $x'_i|x'_{i+1}$.

Démonstration

La première partie de la proposition est immédiate.

Soit maintenant la branche $x_{i+1}|x_i$ et un atome minorant x_{i+1} et x'_i.

Alors $a|0 \sim x_{i+1}|x_i$ et $a|0 \sim x'_i|x'_{i+1}$.

Autres implications : Proposition A7

1) COE et SC → C

2) Dans un UC, il y a autant d'atomes que de coatomes.

Les démonstrations sont immédiates.

Multitreillis IM

Il est temps de justifier le sigle IM qui est lié à l'immersion.

Soit un multitreillis IM et α = card(AT) alors :

Théorème A8

Un multitreillis IM peut s'immerger dans 2^α.

Démonstration

Soit M un multitreillis IM.

Définissons l'application $\phi : M \to 2^\alpha$ par

$\phi(x) = AT_x$

Si $x \leq y$, il est clair que $\phi(x) \subseteq \phi(y)$

Si $\phi(x) \subseteq \phi(y)$, on a $x \leq y$.

M est donc isomorphe à une partie de 2^α.

Immersion de Mac Neille

A une partie F de M on fait correspondre

$\overline{F}$ = min (maj(F)) avec les conventions : si $F = \emptyset$, $\overline{F}$ = min (M)

Au chapitre I nous n'avions pas pris les conventions de H.M. Mac Neille [19] car il ne s'agissait d'immerger que dans un EOI.

Théorème A9

Si un multitreillis a les propriétés IM et COA alors l'immersion de Mac Neille donne 2^{α}.

Démonstration

Notons pour une partie F : $AT_F = \cup \{AT_x | x \in F\}$

- Montrons d'abord que $maj(F) = maj(AT_F)$

Il est clair que $maj(F) \subseteq maj(AT_F)$

Soit maintenant $x \in maj(AT_F)$ et $y \in F$

$AT_y \subseteq AT_x$. Donc $y \leq x$ par (IM), d'où $x \in maj(F)$.

- Montrons ensuite que $AT_F = AT_{\overline{F}}$

Il est clair que $AT_F \subseteq AT_{\overline{F}}$ puisque $F \subseteq \overline{F}$

Soit maintenant $a \in AT_{\overline{F}}$. Donc a minore tout élément de maj(F).

Si $a \notin AT_F$, alors par COA, on trouve a' majorant tous les autres atomes. Donc a' majore AT_F.

Or $maj(F) = maj(AT_F)$. Il s'ensuit que $a \leq a'$.

On aboutit à une contradiction, donc $a \in AT_F$.

Soit une application ϕ de l'ensemble des fermés dans $\mathcal{P}(AT)$ définie par :

$$\phi(\overline{F}) = AT_{\overline{F}}$$

Montrons que ϕ est un isomorphisme.

- ϕ est surjective car toute partie H de AT est atteinte par

$$\phi(\overline{H}) = AT_{\overline{H}} = AT_H = H$$

- ϕ est injective

Soit $\phi(\overline{F}) = \phi(\overline{G})$

alors $AT_{\overline{F}} = AT_{\overline{G}}$

$maj(F) = maj(AT_F) = maj(AT_{\overline{F}}) = maj(AT_{\overline{G}}) = maj(AT_G) = maj(G)$

$maj(F) = maj(G)$, donc $\overline{F} = \overline{G}$

- ϕ est évidemment croissante.

- ϕ^{-1} est croissante.

Si $\phi(\overline{F}) \subseteq \phi(\overline{G})$, alors $AT_{\overline{F}} \subseteq AT_{\overline{G}}$

$maj(G) = maj(AT_{\overrightarrow{G}}) \subseteq maj(AT_{\overline{F}}) = maj(F)$

$\min(maj(F)) \subseteq \min(maj(G))$, donc $\overline{F} \subseteq \overline{G}$

Conservation par homomorphisme d'ordre strict

Aucune forme de complémentation du théorème A1 ne se conserve par homomorphisme quasi-d'ordre strict de 2ème catégorie.

Il suffit pour s'en rendre compte de vérifier que l'homomorphe d'un TB n'est pas SC et l'homomorphe d'un MPCI de Stone n'est pas COA.

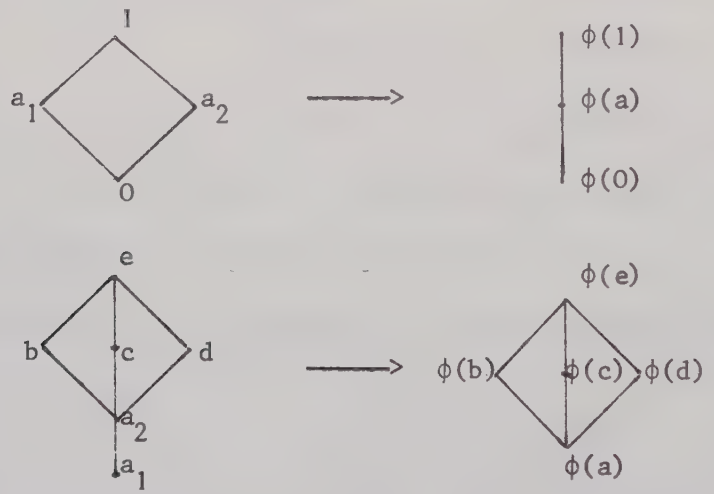


Figure 5

B) MODULAIRES ET DISTRIBUTIFS COMPLEMENTES

Généralisation du théorème de Von Neumann

Von Neumann a prouvé qu'un treillis modulaire complémenté était relativement complémenté. On trouve dans [23] la démonstration que la propriété est vraie dans les multitreillis modulaires au sens de M. Benado.
Le schéma des formes de complémentation se simplifie donc dans ce cas, puisque RC $\leftrightarrow$ SeC $\leftrightarrow$ C.

Distributifs complémentés

Rappelons qu'on a appelé distributifs les multitreillis satisfaisant à la plus faible forme (D1) de distributivité, définie en II E.

Théorème B1

Pour un multitreillis distributif, le schéma du théorème A1 devient

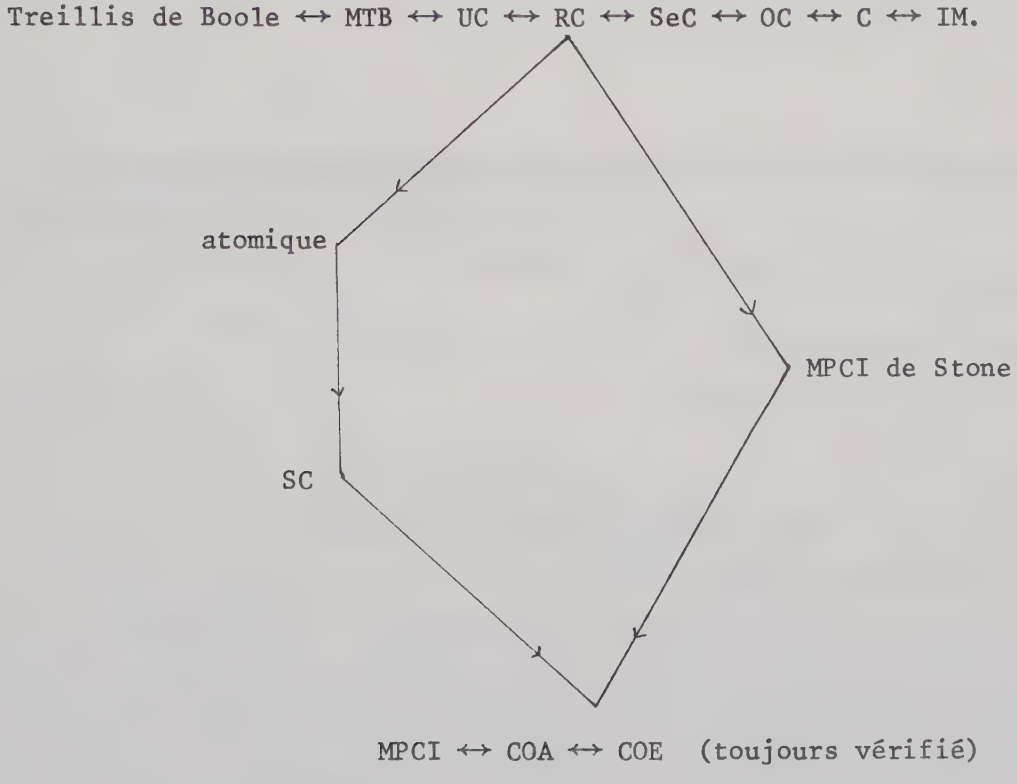


Figure 6

Démonstration

M. Benado [23] a montré que ce "distributif et C" → treillis de Boole. On a vu par ailleurs en III A que distributif → MPCI. Démontrons le reste.

Distributif, IM → treillis de Boole

Soit l'application ϕ d'un treillis M, distributif et IM dans le treillis de Boole $2^{card(AT)}$ définie par

$$\phi(x) = AT_x$$

On sait que IM implique que ϕ est injective, croissante et son inverse est croissante.

Il reste à montrerqu'elle est surjective.

Nous montrons pour cela que toutes les parties de p atomes,
p = 1, 2, ..., card(AT) sont atteintes.

C'est vrai pour p = 1.

Supposons le vrai pour p et soit une partie X de p+1 atomes
$X = Y \cup \{a\}$ où Y contient p atomes, $a \notin Y$.

Y est atteint par $\phi(y) = Y$, par hypothèse de récurrence.

a ne minore pas y, donc il existe $x \in y \vee a$ couvrant y.

Soit un atome $b \notin AT_y$, $b \in AT_x$, alors

$x \in y \vee a$ $\qquad$ $x \in y \vee b$

$y \wedge a = \{0\}$ $\qquad$ $y \wedge b = \{0\}$

A cause de la distributivité, a = b.

Donc $AT_x = AT_y \cup \{a\} = X$

et toute partie de p+1 atomes est atteinte par ϕ.

ϕ est donc surjective.

Remarque

Un multitreillis distributif peut être MPCI de Stone sans être un treillis de Boole, comme le montre l'exemple de la chaîne à 3 éléments.

Théorème B2

Dans un multitreillis distributif fini avec 0 et 1, si a < b et a et b sont non complémentés, il existe entre a et b une chaîne pleine d'éléments non complémentés.

Démonstration

Supposons qu'il y a au moins un élément x complémenté tel que a < x < b. Puisqu'un multitreillis distributif est modulaire et que dans un modulaire,"complémenté" implique "relativement complémenté", x a un complément relatif x' dans [a, b].

Si x' était complémenté, il s'ensuivrait par III A18 que a et b seraient complémentés. Ainsi on a trouvé entre a et b un élément non complémenté x'.
En examinant ensuite les intervalles [a, x'] puis [x', b], on obtient de proche en proche le résultat.

Théorème B3

Dans un multitreillis distributif fini avec 0 et 1, si p est borne supérieure de tous les atomes, alors I_p est un MTB.

Démonstration

Soient a, x, y $\in I_p$ tels que $a \wedge x = a \wedge y = \{0\}$.
Alors par III A15 il existe $z \in I_p \cap (x \vee y)$ tel que $a \wedge z = \{0\}$.
Ainsi I_p est un multitreillis pseudo-complémenté. Puisque p est borne supérieure des atomes, il est clair que dans I_p, a_* est complément de a.
Par unicité du complément, on a alors $a = a_{**}$.
Le théorème A2 nous donne alors le résultat.

DEUXIEME PARTIE

PRODUIT CONTRACTE

CHAPITRE I

Définition du produit contracté

A) PRODUIT CONTRACTE

Rappelons que l'étude de cette opération a été motivée initialement par les treillis de catalogues dans lesquels elle intervient. La nécessité d'un travail sur le produit contracté indépendamment des catalogues a été rendu nécessaire par le grand nombre de propriétés intéressantes de cette opération malgré son caractère particulier.

Rappel des notations

On écrira $T_1 \tilde{=} T_2$ pour exprimer l'isomorphisme des ensembles ordonnés T_1 et T_2. $T_1 \times T_2$ sera le produit cartésien des ensembles T_1 et T_2 et $T_1 . T_2$ sera le produit direct des ensembles ordonnés T_1 et T_2.

Le treillis de Boole à 2^p éléments sera noté 2^p.

Les autres notations utilisées sont évidentes.

Considérons des ensembles ordonnés ayant un élément nul noté 0.

Définition

On considère dans $T_1 \times T_2$ l'ensemble Θ des couples (o, x) et (x, o) et la partition de $T_1 \times T_2$ en sous ensembles pour lesquels Θ est le seul non-singleton. Le produit contracté $T_1 * T_2$ est l'ensemble des classes, muni de la relation d'ordre induite à partir du produit direct.

L'ordre sur les classes a clairement un sens puisque la partition introduit un homomorphisme de 1ère catégorie pour la variable supérieure, de $T_1 . T_2$ dans $T_1 * T_2$ et il est montré dans [4] p. 178 que c'est une condition suffisante pour que $T_1 * T_2$ soit un ensemble ordonné.

Propositions A1

1) $T_1 * T_2 \tilde{=} (T_1 - \{0\}) . (T_2 - \{0\}) \cup \{0\}$.

2) $(T_1 * T_2) * T_3 \tilde{=} T_1 * (T_2 * T_3)$;

$(((T_1 * T_2) * T_3) * \ldots) * T_m$ sera noté $T_1 * T_2 * T_3 * \ldots * T_m$.

3) $T_1 \star T_2 \tilde{=} T_2 \star T_1$.

4) $T_1 \star 2^1 \tilde{=} 2^1 \star T_1 = T_1$.

Proposition A2

Si T_1 et T_2 sont des ensembles ordonnés d'interpolation, (c'est à dire des Λ demi treillis à cause du 0) alors $T_1 \star T_2$ aussi.

Démonstration

Soient en effet (a, b) et (c, d) $\in T_1 \star T_2$.

Si (a, b) et (c, d) ont un majorant commun alors a et c ont un majorant commun dans T_1 et b et d dans T_2. Par suite (aVc, bVd) est composé d'un seul élément et :

(a, b) V (c, d) = (aVc, bVd).

Puisque 2 éléments qui ont un majorant commun ont une borne supérieure unique, 2 éléments qui ont un minorant commun ont une borne inférieure unique. Celle-ci est ainsi définie :

si $a\Lambda c$ ou $b\Lambda d$ est 0 alors (a, b) Λ (c, d) = Θ
sinon (a, b) Λ (c, d) = ($a\Lambda c$, $b\Lambda d$).

Corollaire A3

Si T_1 et T_2 sont des treillis alors $T_1 \star T_2$ est un treillis.

Proposition A4

Si T_1 et T_2 ont au moins 2 atomes qui ont au moins un majorant commun, alors $T_1 \star T_2$ n'est pas un multitreillis semi-modulaire supérieurement au sens de G. Birkhoff.

Démonstration

Supposons que T_1 ait entre autres les atomes a_1 et a_2, et $e \in a_1 \vee a_2$, T_2 ait entre autres les atomes b_1 et b_2, et $f \in b_1 \vee b_2$.

Il est alors clair que $\Theta \prec (a_1, b_1)$ et $\Theta \prec (a_2, b_2)$.

et qu'aucun élément ne peut couvrir (a_1, b_1) et (a_2, b_2) puisque $a_1 \neq a_2$, $b_1 \neq b_2$.

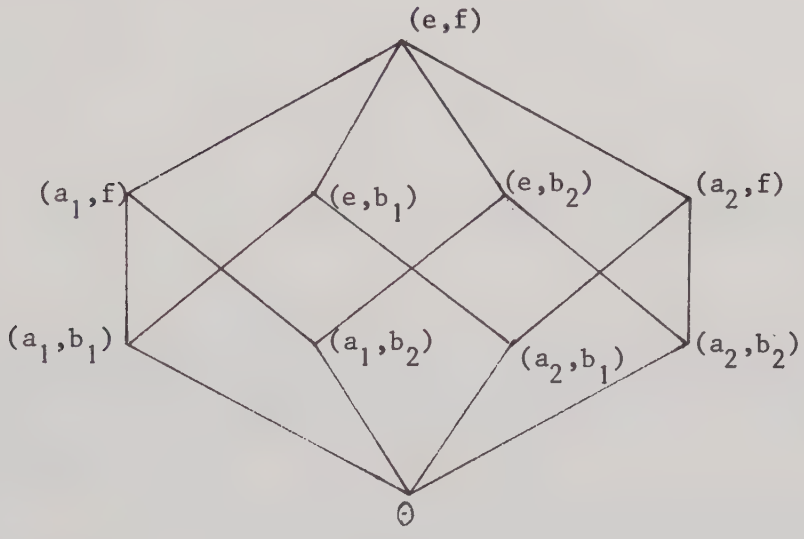


Figure 1

Proposition A5

Dans les mêmes hypothèses que pour A4 $T_1 * T_2$ n'est pas un multitreillis semi-modulaire inférieurement au sens de G. Birkhoff.

Démonstration

Il suffit de trouver dans T_1 par exemple p et q tels que $y \succ p$, $y \succ q$ et $p \wedge q = \{0\}$. Alors, en reprenant les notations de la démonstration précédente (y, f) couvrira (p, f) et (q, f) qui ne couvriront pas Θ.

Or dans tout ensemble ordonné possédant au moins deux atomes a_1 et a_2 qui ont au moins un majorant commun e, on peut trouver de tels p et q.

Vérifions le.

On considère dans T_1, α et β tels que :

$a_1 \leq \alpha \prec e$

$a_2 \leq \beta \prec e$

S'il existe un atome a_3 minorant α et β, on considère cette fois-ci $e_1 \in a_1 \vee a_3$, tel que $e_1 \leq \alpha$ puis α_1, β_1 tels que :

$a_1 \leq \alpha_1 \prec e_1$

$a_3 \leq \beta_1 \prec e_1$

Finalement on trouve 2 suites :

$\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_i$

$\beta, \beta_1, \ldots, \beta_i$

telles que pour un y : $y \succ \alpha_i$, $y \succ \beta_i$ et $\alpha_i \wedge \beta_i = \{0\}$.

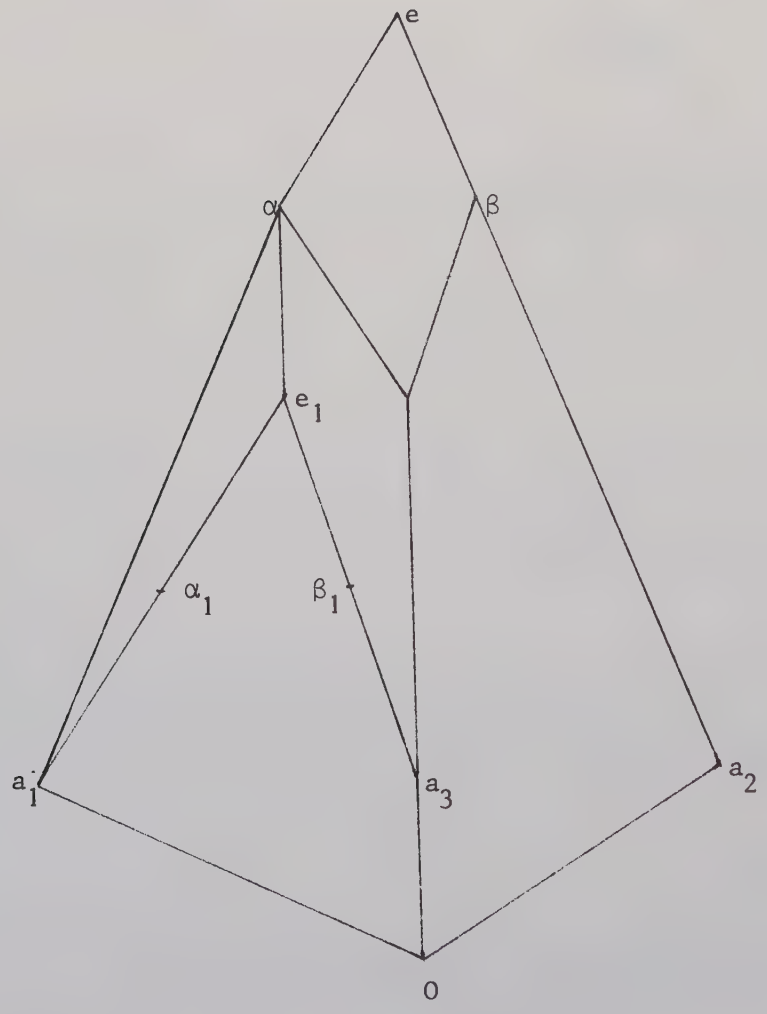


Figure 2

B) GRAPHE DES COMPLEMENTS

Considérons uniquement des ensembles ordonnés avec 0 et 1.

Supposons que T soit complémenté :

On dit que le graphe non orienté (X, U) où X est l'ensemble des sommets, U l'ensemble des arêtes, est graphe des compléments de T si :

- $X = T - \{0, 1\}$
- l'arête $|a, b| \in U$ si et seulement si b est complément de a dans T.

Théorème B1

Si T_1 et T_2 sont complémentés et distincts de 2^1, alors le graphe des compléments de $T_1 \star T_2$ est connexe. Toute arête de ce graphe appartient à au moins un cycle élémentaire de longueur 4, 5, 6, 8.

Deux éléments quelconques peuvent être reliés par au moins une chaîne de longueur paire et au moins une chaîne de longueur impaire.

Démonstration

Soient $x, y \in T_1 \star T_2$, $x, y \neq 0, 1$.

On peut écrire $x = (a, b)$, $y = (c, d)$; $a, c \in T_1$; $b, d \in T_2$.

Montrons qu'il existe une chaîne entre x et y.

Soit $z \in T_2$, $z \neq 0, 1$. Soient a' et c' des compléments respectifs de a et c dans T_1, z' et d' des compléments respectifs de z et d dans T_2.

- Si a et c sont distincts de 1

x = (a, b) est complément de (a', 1)

(a', 1)	...	(a, z)
(a, z)	...	(1, z')
(1, z')	...	(1, z)
(1, z)	...	(c, z')
(c, z')	...	(c', 1)
(c', 1)	...	(c, d) = y

- Si c = 1, alors d ≠ 1 puisque y ≠ 1.

Soit en plus par exemple a ≠ 1

x = (a, b) est complément de (a', 1)

(a', 1)	...	(a, 1)
(a, 1)	...	(a', d)
(a', d)	...	(1, d')
(1, d')	...	(c, d) = y

Les autres cas sont symétriques.

Ainsi x, y quelconques sont reliés par une chaîne : le graphe est connexe.

Par ailleurs tout complément de (a, b), si a et b ≠ 1 s'écrit (a', x) ou (y, b') dans lesquels x et y sont respectivement supérieurs ou égaux à un complément de b et de a.

Tout complément de (a, 1) s'écrit (a', x) pour un x quelconque ≠ 0.

Sans perdre de généralité, on peut alors écrire qu'une arête quelconque du graphe des compléments s'écrit $|(a, b), (a', x)|$ où a, b, x ≠ 0, 1 et $x \geq b'$; ou bien $|(a, 1), (a', x)|$ où a ≠ 0, 1 et x ≠ 0.

La figure ci-dessous présente des cycles de longueur 4, 5, 6, 8 contenant l'arête qui nous intéresse.

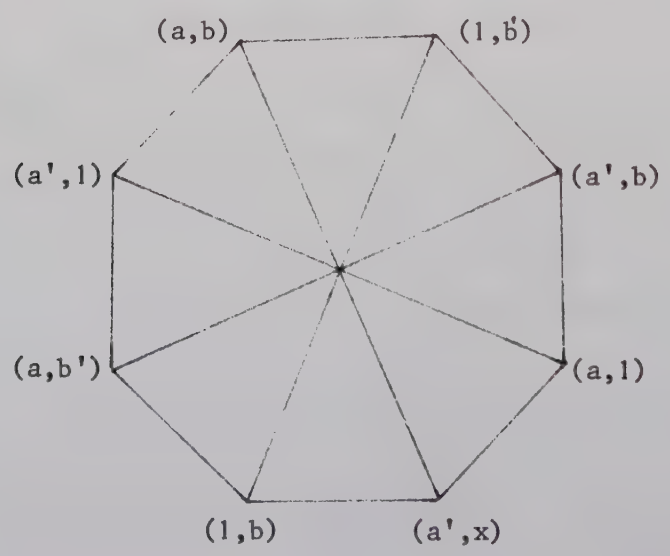


Figure 3

Ce graphe est d'ailleurs exactement le graphe des compléments du treillis $2^2 * 2^2$ à 10 éléments représenté dans la figure 1.

Deux éléments quelconques du graphe des compléments peuvent être reliés par une chaîne de longueur 5 ou 7 comme nous l'avons vu au début de cette démonstration. Il reste à montrer qu'ils peuvent aussi être reliés par une chaîne de longueur paire. Cela est obtenu en remplaçant une arête de la chaîne de longueur impaire par les 4 autres arêtes d'un cycle de longueur 5 le contenant.

Cycle hamiltonien

Rappelons que dans un graphe, un cycle hamiltonien est un cycle élémentaire qui passe par chaque sommet.

Le problème de savoir si le graphe des compléments de $T_1 * T_2$ possède un cycle hamiltonien n'est pas résolu. Nous allons toutefois donner un cas particulier pour lequel la réponse est affirmative.

Soit un ensemble ordonné T muni d'un 0 et d'un 1, complémenté et à nombre pair d'éléments. On dira que son graphe des compléments possède un quasi-cycle hamiltonien si on peut numéroter les éléments de $T - \{0, 1\}$: $t_1, t_2, \ldots, t_{2p}$ de manière que

pour chaque i $\quad 1 \leq i \leq p \quad$ t_{2i-1} et t_{2i} sont compléments l'un de l'autre

$\quad 1 \leq i \leq p-1 \quad$ $t_{2i} \vee t_{2i+1} = \{1\}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ t_{2p} et t_1 sont compléments l'un de l'autre

Proposition B2

Si les ensembles ordonnés T_1 et T_2 munis d'un 0 et d'un 1, complémentés et à nombre pair d'éléments ont un graphe des compléments possédant un quasi-cycle hamiltonien alors le graphe des compléments de $T_1 * T_2$ possède un cyle hamiltonien.

Démonstration

Les quasi-cycles hamiltoniens dans T_1 et T_2 sont respectivement notés $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}, a_1$ et $b_1, b_2, \ldots, b_{2q}, b_1$. La construction du cycle hamiltonien se fait en p chaînages successifs tous semblables sauf le premier qui contient les couples ayant 1 pour première composante.

Premier chaînage

$(a_1, 1)\ (a_2, 1)\ (a_1, b_1)\ (1, b_2)\ (a_2, b_1)\ (a_1, b_2)\ (1, b_1)\ (a_2, b_2)$

$(a_1, b_3)\ (1, b_4)\ (a_2, b_3)\ (a_1, b_4)\ (1, b_3)\ (a_2, b_4)$

...

$(a_1, b_{2q-1})\ (1, b_{2q})\ (a_2, b_{2q-1})\ (a_1, b_{2q})\ (1, b_{2q-1})\ (a_2, b_{2q})$

Deuxième chaînage

$(a_3, b_1)\ (a_4, b_2)\ (a_3, b_3)\ \ldots\ (a_3, b_{2q-1})(a_4, 1)\ (a_3, b_{2q})$

$(a_4, b_1)\ (a_3, b_2)\ (a_4, b_3)\ \ldots\ (a_4, b_{2q-1})(a_3, 1)\ (a_4, b_{2q})$

Les chaînages suivants sont tous semblables à ceci près que a_3 et a_4 sont à remplacer par a_{2i-1} et a_{2i}.

Le $p^{ème}$ chaînage se termine par (a_{2p}, b_{2q}) qui est jointif à $(a_1, 1)$ ce qui ferme le cycle hamiltonien.

C) CLASSES DE BRANCHES ET TREILLIS SIMPLES

Considérons uniquement des ensembles ordonnés avec 0 et 1.

Classes de branches

Théorème C1

Si les ensembles ordonnés T_1 et T_2 sont non réduits à 2^1 et atomiques, alors $T_1 * T_2$ a une seule classe de branches.

Démonstration

Soient a_1, a_2 deux atomes de T_1, b_1, b_2, deux atomes de T_2. Utilisons les notations de la figure 1 :

$e \in a_1 \vee a_2$ dans T_1

$f \in b_1 \vee b_2$ dans T_2

Soit de plus dans T_2 : b_3 tel que $b_2 \leq b_3 \prec f$.

Il est clair que $b_1 \wedge b_3 = \{0\}$, $f \in b_1 \vee b_3$.

On a alors :

$(a_1, b_1) \mid \Theta$ est équivalente à $(e, f) \mid (e, b_3)$

$(e, f) \mid (e, b_3)$ ... $(a_2, b_1) \mid \Theta$

Ainsi quels que soient a_1, a_2, b_1, on a :

$(a_1, b_1) \mid \Theta$ est équivalente à $(a_2, b_1) \mid \Theta$

La même démonstration s'applique au passage de $(a_2, b_1) \mid \Theta$ à $(a_2, b_2) \mid \Theta$.

Toutes les branches $(a_i, b_j) \mid \Theta$ sont alors équivalentes.

Soit maintenant une branche $(a_5, b_5) \mid (a_4, b_4)$ où $(a_4, b_4) \neq \Theta$

On peut supposer par exemple que $a_4 = a_5$ et $b_4 \prec b_5$.

T_2 étant atomique, il existe un atome β tel que

$\beta \leq b_5$, $\beta \not\leq b_4$.

Soit α un atome quelconque minorant a_4.

Alors $(\alpha, \beta) \mid \Theta$ est équivalente à $(a_4, b_5) \mid (a_4, b_4)$.

Toutes les branches sont donc équivalentes : il n'y a qu'une classe de branches.

Treillis simple

Rappelons que G. Birkhoff définit un treillis simple comme un treillis T, dont les seules congruences sont l'égalité et T^2 (une seule classe).

Si dans un treillis il n'y a qu'une classe de branches, alors le treillis est simple.

En effet, si 2 éléments distincts sont congrus, il y a au moins une branche qui a ses 2 extrémités dans la même classe de congruence.

Dès lors toutes les branches ont leurs 2 extrémités dans la même classe. Sur une chaîne entre 0 et 1, il n'y a donc que des éléments d'une seule classe : le treillis est simple d'où :

Corollaire C2

Si les treillis T_1 et T_2 sont non réduits à 2^1 et atomiques, alors $T_1 * T_2$ est simple.

Remarquons que J. Mac Laughlin [30] présente la figure 1 comme exemple de treillis simple, sans bien sûr l'introduire par le produit contracté.

D) INCOMPATIBILITE DU PRODUIT DIRECT ET DU PRODUIT CONTRACTE

On dit que T est irréductible pour * si T a plus de 2 éléments et si $T \cong T_1 * T_2$ implique $T_1 \cong 2^1$ ou $T_2 \cong 2^1$. On dit que T est irréductible pour . si T aplus d'un élément et $T \cong T_1 . T_2$ implique que T_1 ou T_2 a un seul élément.

S est dit avoir la factorisation unique pour le produit direct si, quand on a $S \cong S_1 . S_2 \ldots S_m \cong T_1 . T_2 \ldots T_n$ où les S_i et T_i sont irréductibles alors m = n et $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sont respectivement isomorphes à $S_{\phi_1}, S_{\phi_2} \ldots S_{\phi_n}$ pour une permutation $(\phi_1, \phi_2 \ldots \phi_n)$ de $(1, 2, \ldots, n)$.

On trouve dans G. Birkhoff [4], [37] et T. Nakayama [44] la démonstration de la factorisation unique pour des ensembles ordonnés avec 0 et 1. Il est assez facile d'adapter cette démonstration au cas où on n'a pas de 1.
On définit de même la factorisation unique du produit contracté.
Considérons maintenant que les ordonnés dont il sera question dans la suite de ce paragraphe ont un 0 et un 1.

Théorème D1

Si $S_1, S_2, \ldots, S_m, T_1, T_2, \ldots, T_n$ sont irréductibles pour *, et $S_1 * S_2 \ldots * S_m = T_1 * T_2 * \ldots T_n$ alors m = n et $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sont respectivement isomorphes à $S_{\phi_1}, S_{\phi_2}, \ldots, S_{\phi_n}$ pour une permutation

$\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

On peut démontrer cette propriété directement ou utiliser les théorèmes des articles de C.C. Chang, B. Jonsson, A. Tarski, P. Crawley [39], [42], [43] et surtout [38] où on trouve :

Un ensemble muni d'une relation réflexive antisymétrique et connexe a la propriété de factorisation unique.

Or $T_1 * T_2 \ldots * T_n - \{\Theta\}$ est un ensemble ordonné connexe puisque pour deux quelconques de ses éléments x, y on a $x \leq 1$, $y \leq 1$. Il possède donc la factorisation unique pour le produit direct d'où il ressort que $T_1 * T_2 \ldots * T_n$ possède la factorisation unique pour le produit contracté.

On veut montrer ici que si H_1 et H_2 ont plus d'un élément, T_1 et T_2 ont plus de deux éléments, alors on ne peut avoir :

$$H_1 \cdot H_2 \tilde{=} T_1 * T_2$$

On a déjà observé, d'au moins 3 manières différentes, que $H_1 \cdot H_2 \tilde{=} T_1 * T_2$. Mais ces démonstrations exigeaient des hypothèses assez fortes.

1°) Si T_1 et T_2 sont complémentés, $T_1 * T_2$ est à graphe des compléments connexes. Mais $H_1 \cdot H_2$ ne peut être à graphe des compléments connexes puisque les éléments du centre (ceux de la forme (1, 0) selon la définition de G. Birkhoff) sont à complément unique..

2°) Si T_1 et T_2 sont atomiques, $T_1 * T_2$ a une seule classe de branches. Or dans $H_1 \cdot H_2$ les branches (a, y) | (a, x) où $x \prec y$ et (c, z) | (b, z) où $b \prec c$ ne peuvent pas être directement parallèles.

En effet, si on a par exemple la figure

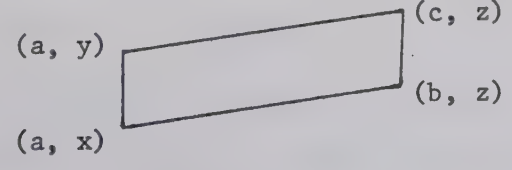


Figure 4

c'est que $a \wedge b = \{a\}$ $y \vee z = \{z\}$

donc $a \vee b = \{b\}$ $y \wedge z = \{y\}$

d'où $b = c$, $x = y$

Il y a donc au moins 2 classes de branches.

3°) Si T_1 et T_2 sont atomiques alors $T_1 * T_2$ est simple. Mais $H_1 . H_2$ n'est pas simple. Il suffit pour le voir de considérer la congruence :

$x \equiv y \longleftrightarrow$ x et y ont même première composante.

Nous allons donner maintenant une démonstration plus forte de l'incompatibilité entre $T_1 * T_2$ et $H_1 . H_2$.

Notations

Soient $S_1, S_2, \ldots, S_m$ des ensembles ordonnés irréductibles pour le produit direct et $X = S_1 . S_2 \ldots\ldots S_m$; T_1 et T_2 sont distincts de 2^1 et $Y = T_1 * T_2$. Supposons que $X \cong Y$.

S_i' est l'ensemble des éléments de X dont les 1ère, 2ème, ..., i-1ème, i+1ème, ..., $m^{ième}$ composantes sont des 1 ; T_1' et T_2' sont l'ensemble des éléments de Y dont respectivement la 2ème et la 1ère composantes sont des 1 en incluant dans chacun d'eux le Θ de Y.

Il est clair que $T_1' \cong T_1$; $T_2' \cong T_2$, $T_1' \cap T_2' = \{\Theta, 1\}$

Soit θ l'isomorphisme de Y sur X, $T_1'' = \theta(T_1')$, $T_2'' = \theta(T_2')$ et pour $i = 1, 2, \ldots, m$: $U_{i1} = S_i' \cap T_1''$; $U_{i2} = S_i' \cap T_2''$.

Lemme D2

$$U_{i1} . U_{i2} \cong S_i$$

Démonstration

Soit l'application de $U_{i1} . U_{i2}$ dans S_i' ainsi définie :

$\phi(\{x, y\}) = x \wedge y, \quad x \in U_{i1}, y \in U_{i2}.$

$x \wedge y$ est composé d'un seul élément car $x \in T''_1, \quad y \in T''_2$.

Montrons que ϕ est un isomorphisme.

- ϕ est bijective.

Soit $a \in S'_i \subseteq X$. Le O de X n'appartient pas à S'_i quand $m \neq 1$. Donc a est distinct de O et s'écrit $\theta(a_1) \wedge \theta(a_2)$ avec $a_1 \in T'_1$, $a_2 \in T'_2$, et ceci, de manière unique ; $\theta(a_1) \geq a$, donc $\theta(a_1) \in S'_i$ et $\theta(a_1) \in U_{i1}$.
De même $\theta(a_2) \in U_{i2}$.

Ainsi a est atteint par ϕ de manière unique.

- Il est par ailleurs clair que ϕ et ϕ^{-1} sont croissantes.
ϕ est donc bien un isomorphisme.

Théorème D3

Avec les hypothèses annoncées, on ne peut pas avoir $H_1 \cdot H_2 \cong T_1 * T_2$.

Démonstration

Décomposons H_1 et H_2 en facteurs irréductibles pour ., $X = H_1 \cdot H_2 \cong \prod_{i \leq n} S_i$. Soit $Y = T_1 * T_2$ et $X \cong Y$.

On a vu que S_i était isomorphe à $U_{i1} \cdot U_{i2}$.
S_i étant irréductible pour . , U_{i1} ou U_{i2} est composé d'un seul élément, soit U_{i1} par exemple.

Ainsi $U_{i1} \cong \{1\}$ et l'isomorphisme de $U_{i1} \cdot U_{i2}$ et de S'_i ($\phi\{x, y\} = x \wedge y$) se réduit en fait à une égalité de U_{i2} et S'_i. Donc, $S'_i \cap T''_2 = S'_i$ ou $S'_i \subseteq T''_2$.

Pour certains i $S'_i \subseteq T''_1$,

pour les autres $S'_i \subseteq T''_2$.

On peut supposer que $S'_1, S'_2, \ldots, S'_k \subseteq T''_1$

$$S'_{k+1}, S'_{k+2}, \ldots, S'_m \subseteq T''_2$$

Soit Ψ_1 application de $\prod_{j\leq k} S'_j$ dans T''_1, définie par

$\Psi_1(\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}) = a_1 \wedge a_2 \ldots \wedge a_k$

et Ψ_2 application de $\prod_{k<j\leq m} S'_k$ dans T''_2, définie par

$\Psi_2(\{a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_m\}) = a_{k+1} \wedge a_{k+2} \wedge \ldots a_m$.

Ψ_1 et Ψ_2 sont injectives.

Ainsi $\Psi_1(\prod_{j\leq k} S'_j) = X_1 \subseteq T''_1$

$\Psi_2(\prod_{k<j\leq n} S'_j) = X_2 \subseteq T''_2$

et $X_1 \cdot X_2 \tilde{=} T''_1 \star T''_2$.

Si le 0 de X (= $X_1 \cdot X_2$) appartient à X_1, c'est qu'il n'y a aucun S'_i dans T''_2. Par l'hypothèse de finitude, T''_1 n'est pas isomorphe à $T''_1 \star T''_2$. On aurait $X = X_1 \subseteq T''_1 \tilde{=} T''_1 \star T''_2 \tilde{=} X$, ce qui est impossible.

Ainsi $X_1 \subseteq T''_1 - \{0\}$ et $X_2 \subseteq T''_2 - \{0\}$ et dans X, 0 serait obtenu par intersection d'un élément de $T''_1 - \{0\}$ qui s'écrirait $(\alpha, 1)$ et d'un élément de $T''_2 - \{0\}$ qui s'écrirait $(1, \beta)$, ce qui est impossible puisque le résultat serait $(\alpha, \beta) \neq 0$. Il y a contradiction.

Donc on ne peut avoir $H_1 \cdot H_2 \tilde{=} T_1 \star T_2$.

Apport du produit contracté au produit direct

Corollaire D4

T étant un ensemble ordonné avec 1, si T est décomposable pour le produit direct, $T \cup \{0\}$ ne l'est pas, et si T a un 0, $T - \{0\}$ non plus.

Démonstration

Soit $T \tilde{=} U_1 \cdot U_2$

Si T U {0} était décomposable en $T_1' \cdot T_2'$ on aurait

$T_1' \cdot T_2' \cong (U_1 \cup \{0\}) \star (U_2 \cup \{0\})$

ce qui est impossible par D3.

Si maintenant T a un {0}, et si $T - \{0\} \cong T_1' \cdot T_2'$

$T \cong (T_1' \cup \{0\}) \star (T_2' \cup \{0\}) \cong U_1 \cdot U_2$

ce qui est aussi impossible.

E) FACTORISATION UNIQUE POUR LE PRODUIT DIRECT

Le très beau résultat de C.C. Chang, B. Jonsson, A. Tarski, [38] sur la factorisation unique d'un ensemble muni d'une relation réflexive, antisymétrique et connexe s'appuie essentiellement sur la connexité. On trouve d'ailleurs dans G. Birkhoff ([4] 3e édition, page 69) un exemple d'ensemble ordonné non connexe qui a 2 décompositions distinctes :

$$(1 + 2^3).(1 + 2 + 2^2) \cong (1 + 2^2 + 2^4).(1 + 2).$$

Cet ensemble ordonné a 6 composantes connexes, 6 éléments minimaux, 6 maximaux. On va donner un résultat partiel indiquant qu'un ensemble ordonné a la factorisation unique pour certaines valeurs du nombre de composantes connexes ou d'éléments maximaux ou de minimaux.

On aura besoin de la notion de pgcd :

Un ensemble ordonné C est un pgcd des ensembles ordonnés A et B si $A \cong C \cdot D$, $B \cong C \cdot E$ et s'il n'y a aucun terme d'une factorisation de D qui soit isomorphe à un terme d'une factorisation de E.

On dira que C, D divisent A et que D et E sont premiers entre eux. Si on a n ensembles ordonnés qui n'ont aucun facteur commun à eux tous, on dira qu'ils sont premiers dans leur ensemble.

Remarquons que si A et B ont la factorisation unique, leur pgcd est unique.

On aura aussi besoin du lemme :

Lemme E1

Si A est connexe $X.A \cong Y.A$ implique $X \cong Y$.

Il suffit d'utiliser la factorisation unique sur chaque composante connexe de X.A et Y.A.

Proposition E2

Un ensemble ordonné Z de p composantes connexes n'a qu'une décomposition en ensembles ordonnés irréductibles dont l'un a p composantes connexes, les autres ont une composante connexe (ce qui n'interdit pas d'autres décompositions).

Démonstration

Soient $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ les p composantes connexes de Z et soient 2 décompositions :

$$Z \cong (X_1 \cup X_2 \cup \ldots X_p) \cdot A_1 \cdot A_2 \ldots A_k$$

$$Z \cong (Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots Y_p) \cdot B_1 \cdot B_2 \ldots B_\ell$$

où les X_i, Y_i, A_i, B_i sont connexes, les X_i sont premiers entre eux dans leur ensemble.
les Y_i aussi. On a donc :

$$Z_1 \cong X_1 \cdot A_1 \cdot A_2 \ldots A_k \cong Y_1 \cdot B_1 \cdot B_2 \ldots B_\ell$$

$$Z_2 \cong X_2 \cdot A_1 \cdot A_2 \ldots A_k \cong Y_2 \cdot B_1 \cdot B_2 \ldots B_\ell$$

$$\ldots\ldots$$

$$Z_p \cong X_p \cdot A_1 \cdot A_2 \ldots A_k \cong Y_p \cdot B_1 \cdot B_2 \ldots B_\ell$$

Prenons le pgcd des ordonnés $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$: les X_i étant premiers entre eux dans leur ensemble, et les Y_i étant premiers entre eux dans leur ensemble, le pgcd à gauche est $A_1 \cdot A_2 \ldots A_k$ et à droite $B_1 \cdot B_2 \ldots B_\ell$. Ainsi, par le lemme, $X_i = Y_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$.
$A_1 \cdot A_2 \ldots A_k$ ou $B_1 \cdot B_2 \ldots B_\ell$ est un ensemble ordonné connexe qui a donc la factorisation unique, ce qui donne le résultat.

Corollaire E3

Un ensemble ordonné de p composantes connexes ou de p éléments maximaux, ou de p éléments minimaux si p est premier, a la factorisation unique pour le produit direct.

Il ne peut avoir en effet que des décompositions de type X.A où A est connexe, puisqu'un ordonné qui a un seul élément maximal ou minimal est connexe.
La propriété précédente donne alors le résultat.

Théorème E4

Tout ensemble ordonné d'au plus 4 composantes connexes a la factorisation unique pour le produit direct.

Démonstration

Soit Z un ordonné d'au plus 4 composantes connexes.
Le corollaire précédent nous donne la factorisation unique quand Z a 1, 2 ou 3 composantes connexes. Admettons donc que Z ait les 4 composantes connexes Z_1, Z_2, Z_3, Z_4.

- D'abord, par la propriété précédente, il n'y a qu'une décomposition en ordonnés irréductibles dont l'un a 4 composantes connexes, les autres une.

- Montrons maintenant qu'on ne peut pas avoir les 2 décompositions possibles :

$Z \cong X \cdot A$ X a 4 composantes connexes, A en a une.

$Z \cong B \cdot C$ B et C ont 2 composantes connexes.

On peut supposer que X et B sont irréductibles pour le produit direct.

Soient X_1, X_2, X_3, X_4, les 4 composantes connexes de X, B_1, B_2 et C_1, C_2 les composantes connexes de B et C respectivement.

On a alors : $X_1 \cdot A \cong B_1 \cdot C_1$

$X_2 \cdot A \cong B_1 \cdot C_2$

$X_3 \cdot A \cong B_2 \cdot C_1$

$X_4 \cdot A \cong B_2 \cdot C_2$

Chaque ligne correspond à un ensemble ordonné connexe donc il y a la factorisation unique.

B_1 et B_2 étant premiers entre eux, on remarque en prenant le pgcd entre la première et la 3ème ligne que A divise C_1. Entre la 2ème et la 4ème ligne, on trouve que A divise C_2.

Donc A divise C qui peut s'écrire H.A. Ainsi $Z \cong X.A \cong B.H.A.$

D'après le lemme, il s'ensuit que $X \cong B.H$, c'est à dire que B qui a 2 composantes connexes divise X qui en a 4.

Ceci contredit l'hypothèse que X est irréductible. On ne peut donc pas avoir en même temps

$$X . A = B . C$$

- Montrons enfin qu'il n'y a qu'une décomposition en ordonnés irréductibles dont deux ont deux composantes connexes.

Considérons que $X = B.C = D.E$ où B et D sont irréductibles.

Notons respectivement B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2 les composantes connexes de B, C, D, E.
On peut supposer que $B_1 . C_1 = D_1 . E_1$
Il y a 6 cas à considérer pour les correspondances entre les autres composantes connexes.

1er cas

$$B_1 . C_1 \cong D_1 . E_1$$
$$B_1 . C_2 \cong D_1 . E_2$$
$$B_2 . C_1 \cong D_2 . E_1$$
$$B_2 . C_2 \cong D_2 . E_2$$

Chaque ligne a la factorisation unique.
En prenant le pgcd entre la 1ère et la 3ème ligne, on trouve $C_1 \cong E_1$.
Entre la 2ème et la 4ème ligne, on trouve $C_2 \cong E_2$.
Il s'ensuit que $B_1 \cong D_1$ et $B_2 \cong D_2$ par le lemme.
Donc $B \cong D$, $C \cong E$.

2ème cas

$$B_1 \cdot C_1 \cong D_1 \cdot E_1$$
$$B_1 \cdot C_2 \cong D_1 \cdot E_2$$
$$B_2 \cdot C_1 \cong D_2 \cdot E_2$$
$$B_2 \cdot C_2 \cong D_2 \cdot E_1$$

Notons C_3 le pgcd de C_1 et C_2
" E_3 " " E_1 et E_2

- Entre la 1ère et la 3ème ligne, on a $C_1 \cong E_3$
" 2ème " 4ème " " $C_2 \cong E_3$

Il s'ensuit que $C_3 \cong E_3$

- Entre la 1ère et la 2ème ligne, on a $B_1.C_3 \cong D_1.E_3$
" 3ème " 4ème " " $B_2.C_3 \cong D_2.E_3$

Donc $B_1 \cong D_1$, $B_2 \cong D_2$ et $B \cong D$

- Entre la 1ère et la 4ème ligne, on a $C_3 \cong E_1$
" 2ème " 3ème " " $C_3 \cong E_2$

Donc $C_1 \cong C_2 \cong E_3 \cong C_3 \cong E_1 \cong E_2$ et $C \cong E$

3ème cas

$$B_1 \cdot C_1 \cong D_1 \cdot E_1$$
$$B_1 \cdot C_2 \cong D_2 \cdot E_1$$
$$B_2 \cdot C_1 \cong D_1 \cdot E_2$$
$$B_2 \cdot C_2 \cong D_2 \cdot E_2$$

Entre la 1ère et la 3ème ligne, on trouve $C_1 \cong D_1 \cdot E_3$
" 2ème " 4ème " " $C_2 \cong D_2 \cdot E_3$

Donc $C \cong D \cdot E_3$

Entre la 1ère et la 2ème ligne, on trouve $B_1.C_3 \cong E_1$
" 3ème " 4ème " " $B_2.C_3 \cong E_2$

Donc $B \cdot C_3 \cong E$

Les deux décompositions B.C et D.E se raffinent donc en $B.D.E_3$ et $D.B.C_3$
Ainsi $E_3 \cong C_3$.

Les décompositions de B.C et D.E en ordonnés irréductibles sont donc les mêmes à un isomorphisme près.

4ème cas

$$B_1 \cdot C_1 \cong D_1 \cdot E_1$$
$$B_1 \cdot C_2 \cong D_2 \cdot E_1$$
$$B_2 \cdot C_1 \cong D_2 \cdot E_2$$
$$B_2 \cdot C_2 \cong D_1 \cdot E_2$$

Entre la 1ère et la 3ème ligne, on a $C_1 \cong E_3$
" 2ème " 4ème " " $C_2 \cong E_3$
Donc $C_3 \cong E_3$

Entre la 1ère et la 4ème ligne, on a $C_3 \cong D_1 \cdot E_3$
" 2ème " 3ème " " $C_3 \cong D_2 \cdot E_3$
Donc $D_1 \cong D_2 \cong \{1\}$

Les 1ère et 2ème lignes donnent : $C_1 \cong C_2$ ou $C_1 \cong C_2 \cong C_3$, puis
$E_1 \cong B_1 \cdot C_1$
$E_2 \cong B_2 \cdot C_2$ ou $E \cong B \cdot C_1 \cong B \cdot C_3$

Si on note (1 - 1) l'ordonné de 2 éléments déconnectés, les 2 décompositions B.C et D.E se raffinent toutes les deux en $B.C_3.(1 - 1)$.

5ème cas

$$B_1 \cdot C_1 \cong D_1 \cdot E_1$$
$$B_1 \cdot C_2 \cong D_2 \cdot E_2$$
$$B_2 \cdot C_1 \cong D_1 \cdot E_2$$
$$B_2 \cdot C_2 \cong D_2 \cdot E_1$$

Entre la 1ère et la 4ème ligne, on a $C_3 \cong E_1$
" 2ème " 3ème " " $C_3 \cong E_2$
Donc $E_1 \cong E_2 \cong E_3 \cong C_3$

Entre la 1ère et la 2ème ligne, on a $B_1 \cdot C_3 \cong E_3$
" 3ème " 4ème " " $B_2 \cdot C_3 \cong E_3$
Donc $B_1 \cong B_2 \cong 1$ et $C \cong D \cdot E_3$

Ainsi B.C et D.E se raffinent toutes deux en $(1 - 1).D.E_3$.

6ème cas

$$B_1 \cdot C_1 \tilde{=} D_1 \cdot E_1$$
$$B_1 \cdot C_2 \tilde{=} D_2 \cdot E_2$$
$$B_2 \cdot C_1 \tilde{=} D_2 \cdot E_1$$
$$B_2 \cdot C_2 \tilde{=} D_1 \cdot E_2$$

Entre la 1ère et la 3ème ligne, on a $C_1 \tilde{=} E_1$
" 2ème " 4ème " " $C_2 \tilde{=} E_2$

Il s'ensuit $B_1 \tilde{=} D_1$
$B_1 \tilde{=} D_2$
$B_2 \tilde{=} D_2$
$B_2 \tilde{=} D_1$

et $C \tilde{=} E$, $B \tilde{=} D$

ce qui termine la démonstration.

Remarque : Le fait que B et C jouent des rôles dissymétriques, ainsi que D et E puisque B et D sont supposés irréductibles, interdit d'échanger les rôles de B et C ou de D et E. Dans ces conditions le nombre de cas à envisager ne peut être ramené de 6 à 3.

DEUXIEME PARTIE

CHAPITRE II

Treillis formés par produit direct et produit contracté à partir de 2^1

A) DEFINITION ET PREMIERES PROPRIETES

Nous écrirons qu'un treillis est CD s'il est formé à partir de 2^1 par un nombre fini d'applications du produit direct et du produit contracté. Ces treillis ont été découverts dans la théorie des catalogues que nous verrons plus loin. Ils se rencontrent aussi dans d'autres théories.

Nombre d'éléments d'un treillis CD

Si card $(T_1) = m$, card $(T_2) = n$

card $(T_1 \times T_2) = m \times n$

card $(T_1 \star T_2) = (m-1) \times (n-1) + 1$

Si on note aussi $\star$ cette opération sur les entiers :
$m \star n = (m-1) \times (n-1) + 1$, on peut dire qu'un entier est nombre d'éléments d'un treillis CD s'il est formé à partir de 2 par opérations produit et $\star$ successives.

Nombres d'atomes

Si T_1 a p atomes, T_2 a q atomes

$T_1 \cdot T_2$ a p + q atomes

$T_1 \star T_2$ a p × q atomes

Tout entier peut être le nombre d'atomes d'un treillis CD.

Proposition A1

Les treillis CD sont des treillis de Jordan Dedekind.

La démonstration est aisée : il suffit de vérifier que les produits direct et contracté conservent la propriété de Jordan Dedekind en introduisant une fonction hauteur.

Pour le produit contracté si h_1 est la hauteur dans T_1, h_2 dans T_2, h_3 dans $T_1 \star T_2$, on observe que

$h_3(\Theta) = 0$

$h_3((x, y)) = h_1(x) + h_2(y) - 1$ où $(x, y) \neq \Theta$

Proposition A2

Les treillis CD sont très connexes.

Ceci résulte directement de 1 II B2.

B) COMPLEMENTATION

Proposition B1

Les treillis CD sont relativement complémentés.

La démonstration est immédiate.

Remarque : G Birkhoff [4] démontre qu'un treillis relativement complémenté est soit simple, soit décomposable pour le produit direct.

Ceci donne une démonstration du fait qu'un treillis CD provenant d'un produit contracté est simple. Le corollaire C2 dans le chapitre I est toutefois plus général puisqu'il ne prend comme hypothèse que l'atomicité.

Corollaire B2

Les treillis CD sont atomiques et coatomiques.

Proposition B3

Dans un treillis CD, le sous-graphe du diagramme de Hasse, formé avec les compléments d'un élément donné, est connexe.

Démonstration

- La propriété est vraie dans 2^1.
- Supposons la vraie dans T_1 et T_2, montrons la dans $T_1.T_2$.

Soient (c, d) et (e, f) des compléments de (a, b) dans $T_1.T_2$ alors il existe une chaîne entre c et e dans T_1 formée uniquement de compléments de a : $c = c_o, c_1, c_2, \ldots, c_p = e$ et une chaîne entre d et f dans T_2 formée uniquement de compléments de b : $d = d_o, d_1, d_2, \ldots, d_q = f$.

Alors la chaîne (c, d) (c, d_1) (c, d_2) ... (c, d_q), (c_1, d_q), (c_2, d_q)... (c_p, d_q) connecte (c, d) et (e, f).

- Supposons la vraie dans T_1 et T_2, montrons la dans $T_1 * T_2$.

C'est évident pour les compléments de (a,1) ou (1,b). Soient maintenant a,b ≠ 1. Rappelons qu'un complément de (a, b) a la forme (x, b') ou (a', y) où a', b' sont respectivement des compléments de a et de b et où x, y majorent respectivement un complément de a et de b. Les éléments de la forme (a', b') sont connexes par la démonstration précédente, ceux de la forme (x, b') ou (a', y) où x majore strictement un complément α de a et y majore strictement un complément β de b sont connectés à partir de (α, b') et (a', β) par des chaînes montantes.

Proposition B4

Dans un treillis CD, les compléments d'un atome forment un Λ demi treillis, les éléments maximaux étant des coatomes.

Démonstration

- La propriété est vraie dans 2^1 (le complément est unique).

- Supposons la vraie dans T_1 et T_2. Montrons la dans $T_1.T_2$.

Soit (a, b) un atome de $T_1.T_2$. Cela signifie que par exemple a est un atome de T_1, et b = 0 dans T_2.

Deux compléments de (a, b) ont la forme (a', 1) et (a", 1) où a' et a" sont des compléments de a dans T_1.

Puisque par hypothèse a' Λ a" est un complément de a, alors (a' Λ a", 1) est un complément de (a, 0).

D'autre part les éléments maximaux de l'ensemble des compléments de a étant des coatomes, il est clair que les éléments maximaux de l'ensemble des compléments de (a, 0) sont des coatomes de $T_1 . T_2$.

- Supposons la propriété vraie dans T_1 et T_2. Montrons la dans $T_1 * T_2$.

Soit (a, b) un atome de $T_1 * T_2$.

Alors a est un atome de T_1, b un atome de T_2.

On peut supposer T_1 et T_2 distincts de 2^1 donc a et b $\neq$ 1.

Soient (a', b') et (a", b") des compléments de (a, b).
Deux cas sont à envisager :

1er cas

a' est un complément de a
b' majore un complément β de b
a" est un complément de a
b" majore un complément γ de b.

Alors par hypothèse a' $\wedge$ a" est un complément de a et b' $\wedge$ b" $\geq \beta \wedge \gamma$ donc b $\vee$ (b' $\wedge$ b") = 1 dans T_2.

Il est clair dans ce cas que (a' $\wedge$ a", b' $\wedge$ b") est un complément de (a, b).

2ème cas

a' est un complément de a
b' majore un complément β de b
a" majore un complément α de a
b" est un complément de b.

Alors a $\wedge$ (a' $\wedge$ a") $\leq$ a $\wedge$ a' = 0

a $\vee$ (a' $\wedge$ a") $\geq$ a $\vee$ (a' $\wedge \alpha$) = 1 par hypothèse

b $\vee$ (b' $\wedge$ b") $\geq$ b $\vee$ ($\beta \wedge$ b") = 1 par hypothèse.

Donc (a' $\wedge$ a", b' $\wedge$ b") est un complément de (a, b).

D'autre part les éléments maximaux de l'ensemble des compléments de a et b respectivement dans T_1 et T_2 étant des coatomes, il est clair que les éléments maximaux de l'ensemble des compléments de (a, b) ont la forme (a', 1) ou (1, b') où a' et b' sont respectivement des coatomes de T_1 et T_2, donc sont des coatomes de $T_1 * T_2$.

Remarque : La propriété précédente n'est pas vraie uniquement pour les atomes. Ce sont les couples (1, x) qui feraient échouer la démonstration pour le produit contracté. Finalement la propriété semble vraie pour tous les couples (a, b) qui n'ont jamais eu de formes (1, x) ou (y, 1) au cours de leur formation.

Proposition B5

Dans un treillis CD les compléments d'un coatome forment un V-demi treillis, les éléments minimaux étant des atomes.

Démonstration

La démonstration est semblable à celle de la proposition B4 sauf pour le produit contracté dans lequel les coatomes jouent un rôle différent de celui des atomes.

Supposons donc la propriété vraie dans T_1 et T_2. Montrons la dans $T_1 * T_2$.

Soit (a, b) un coatome de $T_1 * T_2$ et (a', b') et (a", b") deux de ses compléments.

a par exemple est un coatome et b = 1.

a' et a" sont des compléments de a donc par hypothèse de récurrence a' V a" aussi, donc (a' V a", b' V b") est un complément de (a, b).

D'autre part les éléments minimaux de l'ensemble des compléments de a étant des atomes de T_1, il est clair que les éléments minimaux de l'ensemble des compléments de (a, b) sont des atomes de $T_1 * T_2$.

Correspondance des compléments

On dira qu'un ensemble ordonné T avec 0 et 1, à nombre pair d'éléments et complémenté a la propriété de correspondance des compléments si on peut partitionner T - {0, 1} en 2 parties égales A et B telles qu'on puisse trouver une bijection entre A et B associant à un élément un de ses compléments.

Proposition B6

Les treillis CD possèdent la propriété de correspondance des compléments.

Démonstration

- C'est vrai pour 2^1.
- Si la propriété est vraie pour T_1 et T_2, elle l'est pour $T_1 . T_2$.

Si on a associé x' à x, y' à y, on associe (x', y') à (x, y).

- Pour $T_1 \star T_2$ on procède de même pour les couples (x, y) où x, y $\neq$ 1 et on associe (1, y') à (1, y) et (x', 1) à (x, 1).

C) CLASSES DE BRANCHES

On a vu en D) au chapitre I, diverses manières de distinguer un ensemble ordonné résultant d'un produit contracté et un autre résultant d'un produit direct. On sait entre autres que dans ce dernier cas, il y a plusieurs classes de branches. Examinons combien il y en a.

Proposition C1

Si des ensembles ordonnés T_1, T_2, ... T_n avec 0 ou 1 ont une seule classe de branches, alors $T_1.T_2 \ldots T_n$ a n classes de branches.

Démonstration

On appellera branche de la $i^{ème}$ composante dans le produit direct une branche $\beta|\alpha$ telle que seule la $i^{ème}$ composante diffère dans α et β.

Il est d'ailleurs clair que quelle que soit la branche $\beta|\alpha$, seule une composante varie entre α et β.

Soient 2 branches $\beta|\alpha$ et $\delta|\gamma$ sur la 1ère composante

$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

$\beta = (b_1, a_2, \ldots, a_n)$

$\gamma = (c_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\delta = (d_1, x_2, \ldots, x_n)$

où $a_1 \prec b_1$ et $c_1 \prec d_1$ dans T_1.

Puisque T_1 a une seule classe de branches, alors $\beta|\alpha$ est équivalente à $\xi|\varepsilon$, où

$\varepsilon = (c_1, a_2, \ldots, a_n)$

$\xi = (d_1, a_2, \ldots, a_n)$

Considérons pour fixer les idées que T_2 a un 1.

Supposons que $a_2 \prec b_2 \ldots \prec 1$

$x_2 \prec y_2 \ldots \prec 1$ dans T_2

Alors ξ/ε est équivalente à θ/η, où

$\eta = (c_1, b_2, \ldots, a_n)$

$\theta = (d_1, b_2, \ldots, a_n)$

De proche en proche, en montant par a_2, b_2, ... vers 1, puis en redescendant par y_2, x_2 et en travaillant de la même manière sur la 3ème, 4ème, ..., $n^{ième}$ composantes, on arrive à : $\xi|\varepsilon$ est équivalente à $\delta|\gamma$.

Ainsi toutes les branches sur une même composante sont équivalentes.

On a vu par ailleurs en D du chapitre I, dans le cas n = 2 qui se généralise aisément, que deux branches sur deux composantes distinctes ne peuvent être équivalentes, d'où le résultat.

Remarque : La proposition C1 donne un algorithme pour savoir quel est le nombre d'ordonnés irréductibles dont un treillis CD est le produit direct.

D) CYCLES DU DIAGRAMME DE HASSE D'UN TREILLIS CD

Cycles hamiltoniens

Théorème D1

Le diagramme de Hasse d'un treillis CD distinct de 2^1 possède un cycle hamiltonien.

Démonstration

- 2^2 possède un cycle hamiltonien
- Si T_1 possède un cycle hamiltonien et $T_2 = 2^1$, alors $T_1.T_2$ possède un cycle hamiltonien.

En effet soit $0, x_1, x_2, \ldots, x_n, 0$ le cycle hamiltonien de T_1.
Alors $(0, 0)$ $(0, x_1)$, ..., $(0, x_n)$ $(1, x_n)$ $(1, x_{n-1})$ ...
$(1, x_2)$ $(1, x_1)$ $(1, 0)$ $(0, 0)$
est un cycle hamiltonien de $T_1.T_2$.

- Si T_1 et T_2 possèdent un cycle hamiltonien, $T_1.T_2$ aussi.

Prenons respectivement dans T_1 et T_2 les cycles hamiltoniens

$0, x_1, x_2, \ldots, x_n, 0$ et $0, y_1, y_2, \ldots, y_p, 0$.

Puisqu'il s'agit d'un treillis CD, les cycles ont une longueur paire.
On considère alors dans $T_1.T_2$

$$(0, 0)\ (0, y_1)\ (0, y_2)\ \ldots\ (0, y_p)\ (x_1, y_p)\ (x_1, y_{p-1})\ \ldots\ (x_1, y_1)\ (x_1, 0)$$

$$(x_2, 0)\ (x_2, y_1)\ (x_2, y_2) \ldots (x_2, y_p)\ \ldots\ (x_n, y_p)\ (x_n, y_{p-1})\ \ldots\ (x_n, y_1)$$

$$(x_n, 0)\ (0\ ,\ 0)$$

- Si T_1 et T_2 possèdent un cycle hamiltonien $T_1 * T_2$ aussi.

Prenons respectivement dans T_1 et T_2 les cycles hamiltoniens

$0, x_1, x_2, \ldots, x_n, 0$ et $0, y_1, y_2, \ldots, y_p, 0$.

Puisqu'il s'agit d'un treillis CD, les cycles ont une longueur paire.
On considère alors dans $T_1 * T_2$

$$\Theta\ (x_1, y_1)\ (x_1, y_2)\ \ldots\ (x_1, y_p)\ (x_2, y_p)\ (x_2, y_{p-1})\ \ldots\ (x_2, y_1)\ (x_3, y_1)$$

$$\ldots\ (x_n, y_1)\ (x_n, y_2)\ \ldots\ (x_n, y_p)\ \Theta$$

Base des cycles

Cette notion est définie entre autres à propos du nombre cyclomatique dans les graphes.

Soit b le nombre de branches du diagramme de Hasse. Numérotons les dans un ordre quelconque.

On attache à chaque cycle c un sens de parcours quelconque et un vecteur V_c dans Z^b tel que V_c^i, la $i^{ème}$ composante de V_c soit égale à $x - y$ si c rencontre la $i^{ème}$ branche x fois dans son sens de parcours, y fois dans le sens inverse.

L'ensemble des vecteurs ainsi obtenus admet une base. L. Haskins et S. Gudder [15] montrent que pour un multitreillis semi-modulaire au sens de G. Birkhoff, on peut trouver une base ne contenant que des cycles de 4 branches.

Théorème D2

Tout treillis CD admet une base de cycles ne contenant que des cycles de 4 branches.

Démonstration

Il suffit de montrer que toute branche d'un cycle appartient à un cycle de longueur 4.

- La propriété est vraie dans 2^1 où il n'y a pas de cycle.

- Supposons la vraie dans T_1 et T_2 et voyons pour $T_1.T_2$.

Soit la branche $(y_1, y_2) \mid (x_1, x_2)$.

Supposons que $x_1 \prec y_1$, $x_2 = y_2$. Puisque la branche $y_1 \mid x_1$ appartient dans T_1 à un cycle de longueur 4, le fait de mettre une seconde composante x_2 ne change rien.

- Supposons la vraie dans T_1 et T_2 et voyons pour $T_1 * T_2$.

Soit la branche $(y_1, y_2) \mid (x_1, x_2)$

. Si $(x_1, x_2) \neq \Theta$ on peut supposer que $x_1 \prec y_1$, $x_2 = y_2$.

$y_1 \mid x_1$ appartient dans T_1 à un cycle de longueur 4. Soit dans ce cycle la branche $z_1 \mid t_1$ directement parallèle à $y_1 \mid x_1$.

Si $t_1 \neq 0$ on obtient un cycle de longueur 4 avec les branches $(z_1, x_2) \mid (t_1, x_2)$ et $(y_1, x_2) \mid (x_1, x_2)$.

Si $t_1 = 0$ alors z_1 et x_1 sont des atomes

Si x_2 est un atome, les branches écrites ci-dessus forment un cycle de longueur 4 puisque (z_1, x_2) et (x_1, x_2) sont des atomes de $T_1 * T_2$.

Si x_2 n'est pas un atome soit $t_2 \prec x_2$ dans T_2.

On obtient alors un cycle de longueur 4 avec les branches $(y_1, t_2) \mid (x_1, t_2)$ et $(y_1, x_2) \mid (x_1, x_2)$.

. Si $(x_1, x_2) = \Theta$ c'est que y_1 et y_2 sont respectivement des atomes dans T_1 et T_2. Supposons que dans T_1, la branche $y_1 \mid 0$ appartienne au cycle de longueur 4 contenant comme branche directement parallèle $z_1 \mid t_1$.

Il est alors clair que les branches $(y_1, y_2) \mid \Theta$ et $(z_1, y_2) \mid (t_1, y_2)$ forment un cycle de longueur 4.

E) DECOMPOSITION DES TREILLIS CD

Avant de passer à la décomposition des treillis CD, examinons la décomposition d'ensembles ordonnés avec 0 et 1 pour les produits direct et contracté.

On dispose de théorèmes permettant de savoir si un ensemble ordonné C est le produit des ensembles A et B. V. Novak et J. Schmidt [45] présentent ce problème pour des ensembles ordonnés avec 0.Les algorithmes sont d'une application difficile s'il n'y a pas de 1.

Dans un ensemble ordonné T avec 0 et 1, si I_x est un facteur, alors $I_{x'}$ est l'autre facteur, où x' est le complément unique de x.

Proposition E1 (V. Novak, J. Schmidt)

$T \cong I_x . i_{x'}$, si et seulement si tout $e \in T$ s'écrit de manière unique sous la forme b V c où $b \in I_x$, $c \in I_{x'}$.

L'algorithme est dans ce cas assez simple. R.M. Baer et O. Osterby [6] présentent divers algorithmes sur les ensembles ordonnés à partir d'une matrice triangulaire supérieure de 0 et de 1. Ils donnent le moyen de trouver le complément, l'union, etc. A partir de tels programmes, il est aisé de considérer les x tels que card (I_x) divise card (T) et de voir si I_x peut être un facteur par la propriété énoncée ci-dessus.

Comme nous l'avons dit, s'il n'y a pas de 1 dans T, il n'est pas simple de trouver les facteurs. Or la recherche des facteurs pour le produit contracté se ramène à la recherche des facteurs pour le produit direct dans un ensemble ordonné sans 0, puisque si $T = A \star B$, $T - \{0\} \cong (A - \{0\}) \cdot (B - \{0\})$.

Nous allons maintenant voir que pour un treillis CD, la décomposition se fait plus facilement.

Algorithme de décomposition d'un treillis CD

Si le treillis n'est pas à graphe des compléments connexes, il est isomorphe au produit des I_x où x est minimal (distinct de 0) parmi les éléments ayant un seul complément. x s'écrit en effet : (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0).

Si le treillis est à graphe des compléments connexes, il est résultat d'un produit contracté dont il faut pouvoir trouver les facteurs.

Notons C(x) l'ensemble des coatomes supérieurs ou égaux à tous les compléments de x et posons :

$$C_2(x) = \cup \{C(y) \mid y \in C(x)\}.$$

Proposition E2

Dans un treillis CD résultant d'un produit direct, si x et y sont deux coatomes distincts, alors $y \in C(x)$ ou $y \in C_2(x)$.

Démonstration

Supposons que x s'écrive (a, 1, 1, ..., 1) et y = (1, b, 1, ..., 1) l'union z des compléments de x est z = (a', 0, 0, ..., 0) et $y \geq z$ donc $y \in C(x)$.

Si par contre y s'écrit (d, 1, 1, ..., 1) alors l'union z des compléments de x est t = (a', 0, 0, ..., 0). On peut trouver un coatome u = (1, b, 1, ..., 1) supérieur ou égal à t et $y \in C(u)$.

Corollaire E3

Dans un treillis CD résultant d'un produit contracté d'ordonnés irréductibles pour $*$, S_1, S_2, ..., S_n, tous les éléments de la forme (x, 1, 1, ..., 1) et eux seuls sont générés à partir d'un coatome de cette forme par les opérations C, C_2, et d'intersection, effectuées sur des éléments $\neq \Theta$.

Démonstration

Soit un coatome p = (x, 1, ..., 1) où x est un coatome de S_1. Par la propriété précédente on peut obtenir le coatome y à partir de x

dans S_1, par C et C_2. Donc dans $S_1 * S_2 \ldots * S_n$, on obtient (y, 1, 1, ..., 1) à partir de p. Puisque le treillis S_1 est coatomique, on obtient tous les éléments de cette forme par intersection de coatomes. Il est clair enfin que les opérations C, C_2, sur des éléments $\neq \Theta$, et l'intersection ne donnent que des éléments de cette forme.

L'ensemble des éléments obtenus, auxquels on adjoint 0 et 1 est un facteur du produit contracté. On obtient les autres facteurs à partir d'un coatome non encore investi.

F) APPLICATIONS DES TREILLIS CD

Nous verrons dans la 3ème partie que les treillis de catalogues sont des treillis CD. Donnons une autre application :

Graphe avec source et puits

Les graphes dont il sera question sont donnés par un quadruplet (X, U, s, p) où X est l'ensemble des sommets.

U est l'ensemble des arcs

s est un élément de X appelé source (sans arc incident vers l'intérieur)

p est un élément de X appelé puits (sans arc incident vers l'extérieur)

et possèdent au moins un chemin de s à p.

Graphe série-parallèle

Il existe de nombreuses manières de définir un graphe série-parallèle. Donnons une définition récursive qui sera la plus utile pour la propriété qui suivra.

La mise en série des graphes G_1 et G_2 dont on a éventuellement changé les noms des sommets pour qu'ils s'écrivent $G_1 = (X_1, U_1, \alpha, \beta)$ et $G_2 = (X_2, U_2, \beta, \gamma)$ avec $X_1 \cap X_2 = \{\beta\}$ donne le graphe $(X_3, U_3, \alpha, \gamma)$ où $X_3 = X_1 \cup X_2$, $U_3 = U_1 \cup U_2$.

La mise en parallèle des graphes G et F dont on a éventuellement changé les noms des sommets pour qu'ils s'écrivent $G_1 = (X_1, U_1, \alpha, \beta)$, $G_2 = (X_2, U_2, \alpha, \beta)$ avec $X_1 \cap X_2 = \{\alpha, \beta\}$, donne le graphe $(X_3, U_3, \alpha, \beta)$

Un graphe est série parallèle s'il peut être obtenu à partir de $(\{\alpha, \beta\}, \{|\alpha, \beta|\}, \alpha, \beta)$ par un nombre fini d'applications de mise en série et en parallèle.

Ecoulement

Soit un graphe (X, U, s, p).

On représente un chemin par un mot de U^*.

a_1, a_2 étant des chemins de s à q, b_1, b_2 des chemins de q à p, un ensemble E de chemins de s à p est appelé un écoulement si :

a_1b_1, $a_2b_2 \in E$ implique a_1b_2, $a_2b_1 \in E$.

Exemple

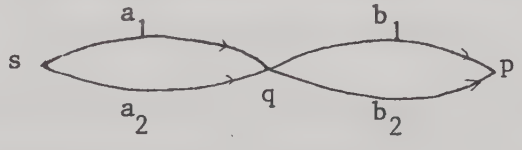


Figure 1

F. Garoche [41] a montré que les écoulements formaient un treillis pour un graphe avec source et puits quelconque.

Pour les graphes série-parallèle, on obtient une représentation des treillis CD.

Ainsi le treillis des écoulements du graphe de la figure 1 est le treillis $2^2 * 2^2$ donné à la figure 1 du chapitre I.

Théorème F1 (F. Garoche et M. Tréhel)

Les treillis CD sont les treillis des écoulements des graphes série parallèle.

Démonstration

- Pour le graphe constitué d'un seul arc, il y a 2 ensembles de chemins qui sont l'ensemble vide et l'ensemble constitué de ce chemin unique. Le treillis des écoulements est 2^1.

- Soient maintenant deux graphes série parallèle G_1 et G_2 dont les treillis des écoulements sont T_1 et T_2. Tout écoulement du graphe obtenu en mettant en parallèle G_1 et G_2 est obtenu en prenant un écoulement de G_1, un de G_2. Le treillis de ces écoulements est $T_1.T_2$.

- Si maintenant on met en série G_1 et G_2, tout écoulement du graphe obtenu est formé d'un écoulement non vide de G_1 concaténé à un écoulement non vide de G_2. Le treillis de ces écoulements est $T_1 * T_2$ si on y inclue l'ensemble vide de chemins.

Remarque : Le fait d'enlever d'un graphe un sommet qui n'est pas la source ou le puits dont le degré intérieur ou extérieur vaut 1 en effectuant le raccordement de manière évidente ne change pas le treillis des écoulements.

Si on dit que deux réseaux série parallèle sont équivalents s'ils sont tous deux composés d'un arc ou s'ils sont isomorphes après ces suppressions successives, on a :

Proposition F2

Un treillis CD est caractéristique d'une classe de graphes série parallèle.

Ceci résulte de la factorisation unique des produits direct et contracté et de l'incompatibilité des 2 factorisations.

TROISIEME PARTIE

CATALOGUES

INTRODUCTION A LA 3ème PARTIE

INTRODUCTION

Le problème de l'échange d'informations sur bande magnétique entre laboratoires s'est posé dès l'apparition de ces bandes dans les centres de calcul : pour que le centre récepteur puisse décoder l'information, il est nécessaire que le format soit parfaitement défini. Le Centre d'Etudes pour la Traduction Automatique de Grenoble et le Laboratoire de Linguistique de la Rand Corporation à Santa Monica en Californie ont coordonné leurs efforts pour arriver à un format commun en 1963. Le résultat fut appelé format de catalogue [57] et [64]. La façon de relier entre eux les différents types d'information était expliquée dans un cas particulier. C'est seulement plus tard que la structure de catalogue fut définie de manière générale, à l'aide de la théorie des ensembles ordonnés, et que diverses propriétés mathématiques apparurent [61].

Bien que les catalogues soient issus de préoccupations linguistiques, ce n'est pas dans cette discipline qu'on en trouve les exemples les plus intéressants, mais plutôt à propos de préoccupations administratives. Nous allons donc présenter la notion de catalogue à partir d'exemples de complexité croissante, puis donner des schémas de fichiers qui ont été réellement construits sur ce format.

De nombreux fichiers administratifs ont une structure de catalogue à carte linéaire : ils sont constitués d'un certain nombre de fiches qui ont toutes le même nombre de niveaux. Les informations qu'on trouve à un niveau donné sont dites être les différentes étiquettes d'une même caractéristique.

Supposons qu'on ait trois caractéristiques : un nom d'individu, son prénom, puis un code d'identification. Chaque fiche sera constituée de ces trois éléments.

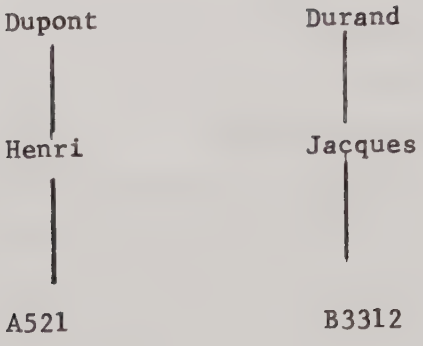


Figure 1

L'information est de type "un pour un" puisque chaque individu n'a qu'un prénom principal et qu'un code. Toutefois, il peut y avoir plusieurs individus portant le même nom, et éventuellement le même prénom.

On peut alors imaginer de regrouper les informations de plus haut niveau.

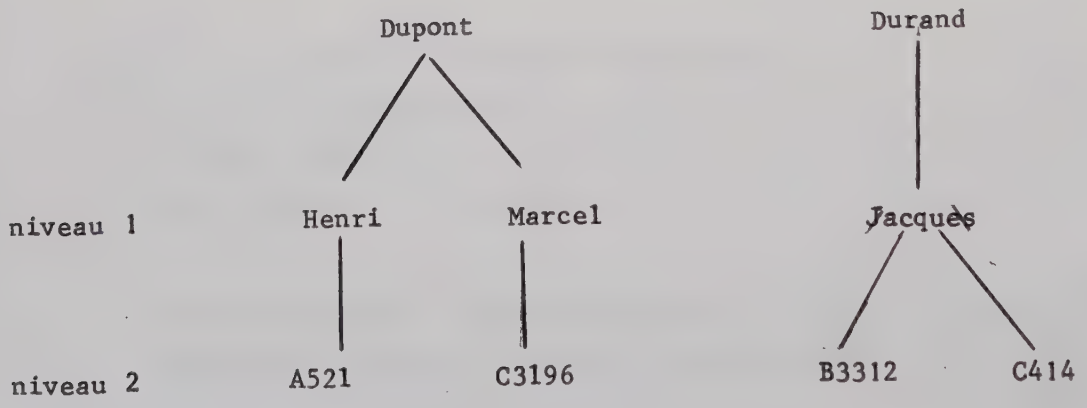


Figure 2

La mise sous forme arborescente n'a pas tellement de raison d'être dans ce cas. Présentons l'exemple de l'emploi du temps dans une université, où il en va différemment. Au nom de la personne, on attache les cours qu'il fait, puis le lieu, le jour, l'heure où il les fait.

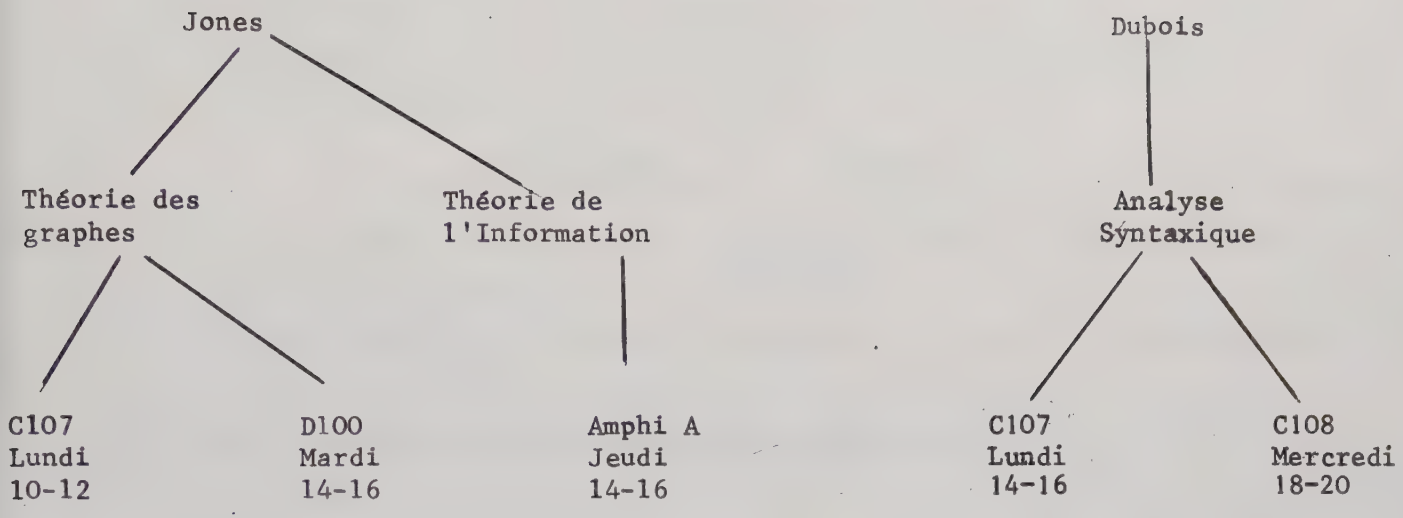


Figure 3

Un tel catalogue a cinq fiches.

La description des caractéristiques est faite au moyen d'une chaîne appelée carte et qui dans cet exemple se présente ainsi :

Figure 4

Une telle carte est dite linéaire. On peut imaginer une carte arborescente dans laquelle, si deux caractéristiques ne sont pas irrémédiablement liées l'une à l'autre, elles ne sont plus l'une sous l'autre.
Ainsi, on peut avoir la carte :

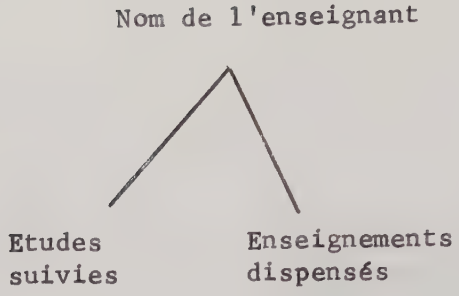


Figure 5

Afin que le catalogue soit une arborescence, nous adjoignons une racine .

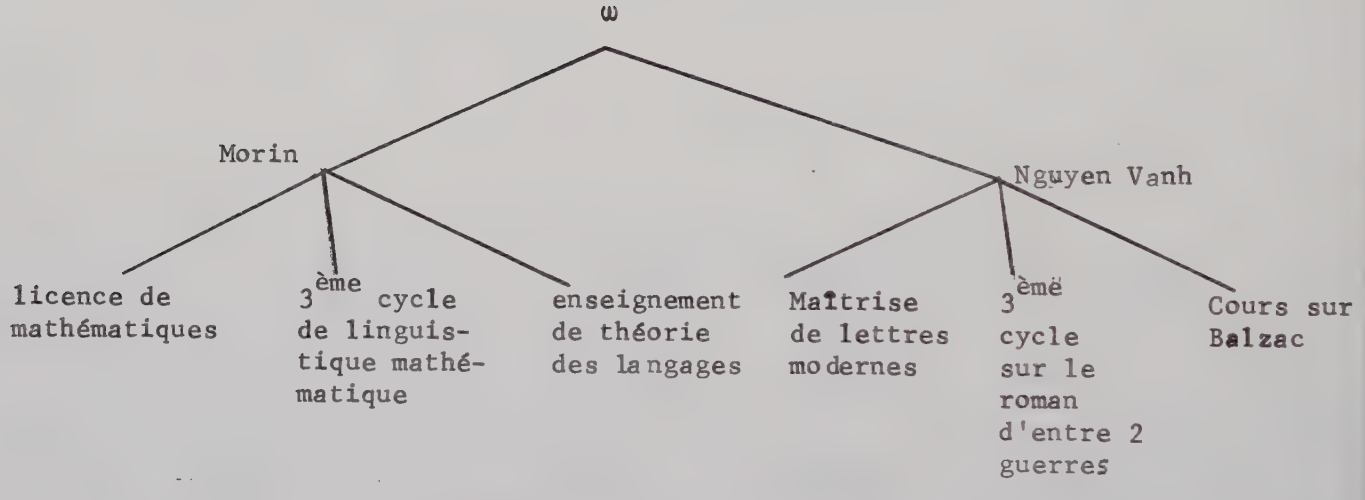


Figure 6

La fiche n'est plus une chaîne comme précédemment, mais une arborescence.

C'est une partie du catalogue, composée d'une et une seule étiquette de chaque caractéristique. Il y a quatre fiches dans l'exemple ci-dessus, chacune étant composée du nom d'un individu, d'un cycle d'études qu'il a suivi, d'un enseignement qu'il dispense.

On a déjà dit que c'est à propos de linguistique que les catalogues ont été introduits. D'abord le corpus, ensemble de textes servant à tester les programmes de traduction automatique a été mis sur bandes sous le format de catalogues. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter les notices de la Rand Corporation ([55] et [57]).

Des dictionnaires techniques de l'anglais au russe ont aussi été mis sous format de catalogues : chaque dictionnaire (D) donne une liste de numéros (NR), de noms.
A chaque numéro sont attachées ses formesen russe (FR) et ses équivalents anglais (EE).
Sous chaque (FR) on trouve des codes grammaticaux (CG) et des codes idiomatiques (CI).
La carte est la suivante :

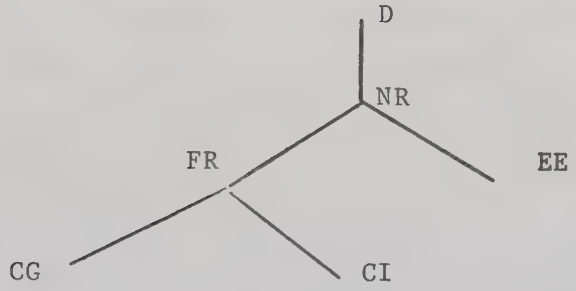


Figure 7

Tous ces exemples ne suffisent pas pour définir formellement un catalogue. La difficulté rencontrée pour aborder cette définition est dûe au fait qu'un catalogue n'est pas un ensemble, car plusieurs de ses éléments peuvent porter le même nom, c'est à dire la même étiquette, donc, a fortiori, ce n'est pas un ensemble ordonné.
Ainsi, pour la figure 5 plusieurs enseignants peuvent avoir suivi des études communes et dès lors le nom de ces études se retrouvera à plusieurs endroits dans le catalogue. Nous passerons donc par la notion intermédiaire

de précatalogue, qui, lui, est un ensemble ordonné, dont on peut ensuite étiqueter des éléments distincts avec la même étiquette, sous certaines conditions.
L'ensemble des étiquette d'une même caractéristique A sera appelée la collection liée à A. Nous serons aussi amenés à imposer à chaque fiche d'être complète, c'est à dire d'avoir une et une seule étiquette pour chaque caractéristique. Nous utiliserons pour cela la notion d'homomorphisme de première catégorie.

Avant de terminer cette introduction, citons quelques articles et ouvrages où des structures voisines sont formalisées.

Dans une étude sur les banques de données [48], le groupe de l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble utilise le vocabulaire suivant :

Les étiquettes d'une caractéristique sont appelées ses valeurs.
Les fiches sont des entités pour une carte linéaire.
On trouve aussi des cartes non linéaires telles que :

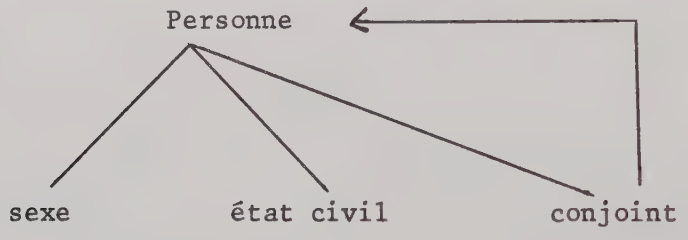


Figure 8

"Conjoint" est une caractéristique conditionnelle. Elle n'existe que si la personne est mariée. Un pointeur renvoie alors à la liste des personnes.

Les articles suivants présentent des cartes linéaires.

Le terme de "fiches" est utilisé par P. Namian [59] alors que D. Hsiao, F. Harary [56] utilisent celui de "record". Les articles mentionnés ne s'intéressent pas à la structure arborescente.
Les fiches sont seulement placées côte à côte. Les caractéristiques sont des "attributs".

C. Delobel [52] s'intéresse à l'aspect mathématique d'une collection de données qu'il définit comme un sous-ensemble du produit cartésien des ensembles d'étiquettes. Il retrouve la fusion normale qui avait été introduite par G. Veillon [64] en 1964 sous le terme de composition. La composition de cartes que nous définirons en IB est un peu plus complexe puisqu'elle ne concerne pas seulement les cartes linéaires.

E.F. Codd [50] présente la collection de données comme une relation, ce qui est équivalent au sous-ensemble du produit cartésien. Il introduit diverses opérations comme la projection, l'union et la permutation que nous appelons restructuration dans un cas plus général.

J. Zidani [65] s'intéresse par contre, aux parties de l'ensemble des caractéristiques telles que leurs étiquettes impliquent les étiquettes d'autres caractéristiques.
Pour un fichier donné, elle organise cette implication en préordre.

Il n'est pas rare de trouver des fichiers arborescents dans lesquels les seules informations effectives sont aux feuilles. Les autres sommets sont des têtes de chapitres, des divisions et subdivisions permettant d'arriver aux feuilles.
C'est le cas pour un article de R.C. Daley et P.G. Neumann [51].

Signalons enfin les listes dans Y. Harrand [54]. Bien que les sommets qui ne sont pas des feuilles soient, dans les exemples donnés, destinés à affiner une classification au fur et à mesure qu'on se rapproche des feuilles, ils gardent un intérêt en eux-mêmes. Ainsi, pour une classification du règne animal on trouve la carte :

Embranchement — classe — sous-classe — ordre — sous-ordre — famille — espèce

Pour définir mathématiquement les catalogues, nous aurons besoin de la notion de pseudo-arborescence. Rappelons la définition donnée par A. Quere et C. Pair [60].

Pseudo-arborescence dans un ensemble V. Etiqueter les points d'une arborescence par des éléments d'un ensemble V revient à définir une application de l'ensemble des points de l'arborescence dans V. Mais il est souhaitable que deux arborescences isomorphes, dont les points qui se correspondent dans l'isomorphisme ont même étiquette, n'en fassent qu'une. Aussi sommes-nous conduits à la définition suivante :

Soit un ensemble V. Dans l'ensemble des couples (I, f) formés par une arborescence I et une application f de l'ensemble des points de I dans V, introduisons la relation d'équivalence :

$(I, f) \sim (I', f') \iff$ il existe un isomorphisme h de I sur I' tel que $f = f' \circ h$.

Une pseudo-arborescence dans V est une classe de cette équivalence.

TROISIEME PARTIE

CHAPITRE I

Définition des catalogues

A) DEFINITION DES CATALOGUES, UNION ET INTERSECTION

Soit un ensemble X et une relation d'ordre H qui en fait une arborescence $Y = (X, H)$. Une forêt F est dite un précatalogue sur Y s'il existe une application surjective de F sur Y qui soit un homomorphisme d'ordre strict de première catégorie successivement par rapport aux deux variables.

Il est clair que tous les éléments de $\phi^{-1}(x)$ sont au même niveau pour chaque $x \in X$.

Ajoutons une racine ω et étiquetons les éléments du précatalogue de sorte que deux éléments ne peuvent avoir même étiquette que s'ils appartiennent au même $\phi^{-1}(x)$ et s'ils ne couvrent pas un même élément. La pseudo arborescence obtenue est un catalogue.

Les éléments de X sont notés A, B, C, ...D. L'ensemble des étiquettes de $\phi^{-1}(A)$ est noté coll (A) = $\{a_1, a_2, \ldots a_\alpha\}$ et appelé collection liée à A. Son nombre d'éléments est card (coll (A)).
De même coll (B) = $\{b_1, b_2, \ldots b_\beta\}$ et ainsi de suite.

$$V = \text{coll (A)} \cup \text{coll (B)} \ldots \cup \text{coll (D)} \cup \{\omega\}$$

est dit ensemble d'étiquetage.

On trouvera des exemples de catalogues à la figure 1.

On appellera carte Z la donnée de l'ensemble X ordonné par la relation d'ordre H et de V. On écrit $Z = (X, H, V)$ et arb (Z) = (X, H). Les catalogues ainsi définis auxquels on adjoint l'ensemble vide noté 0, sont les catalogues de carte Z. Enfin, un catalogue contenant un et un seul a_i, un et un seul b_i, ... un et un seul d_i est appelé une fiche.

R est dit une fiche extraite de K si R est une fiche et si toute chaîne maximale de R est une chaîne maximale de K.

Conditions pour qu'un ensemble E de chaînes définisse un catalogue de carte donnée :

1) Ces chaînes doivent être toutes distinctes.
2) Chacune doit faire partie d'une fiche formée uniquement de chaînes de E.

Ces conditions sont visiblement nécessaires. D'autre part si elles sont réalisées, il est clair qu'on peut organiser ces chaînes en catalogue et cette organisation ne donne qu'un catalogue.

Union et intersection de catalogues

Soient les catalogues K_1 et K_2 de même carte C_1.

Ordre

On écrit $K_1 \leq K_2$ si chaque fiche extraite de K_1 est une fiche extraite de K_2. Ceci est équivalent à dire que chaque chaîne maximale de K_1 est une chaîne maximale de K_2.

Union de K_1 et K_2

D'après ce qu'on a vu à la page précédente, il existe un catalogue et un seul dont l'ensemble des chaînes maximales est l'union des ensembles des chaînes maximales de K_1 et K_2. Il s'ensuit qu'il existe une borne supérieure unique de K_1 et K_2.

Exemple

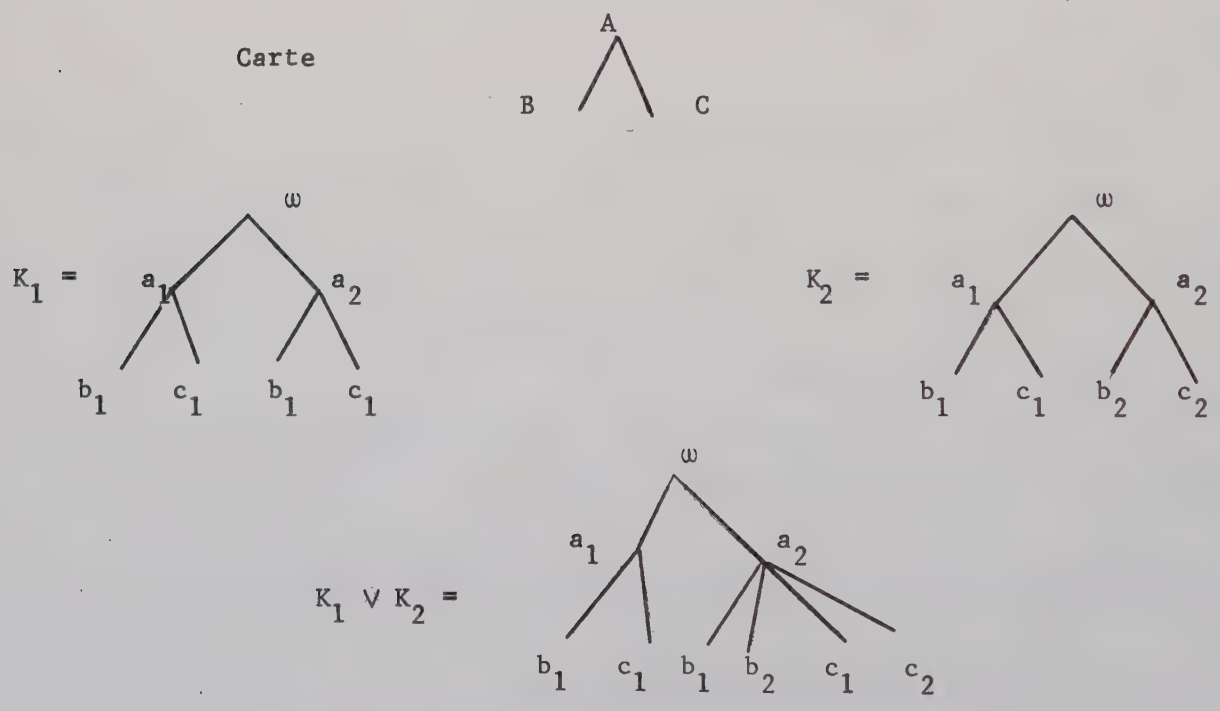


Figure 1

C'est un exemple où $K_1 \vee K_2$ contient des fiches qui n'appartiennent ni à K_1 ni à K_2.

Puisque deux catalogues de carte C_1 ont une union et qu'on a défini un catalogue O, les catalogues de carte C_1 forment un treillis qui sera noté $T(C_1)$. V étant fini, il s'agit d'un treillis fini. Son élément nul a été noté O. Son élément universel est noté 1. Les atomes sont les catalogues formés d'une seule fiche.

L'intersection est ainsi définie :

Intersection de K_1 et K_2

$K_1 \wedge K_2$ est l'union des fiches extraites de K_1 et K_2 simultanément.

Exemple

On reprend K_1 et K_2 de la figure 7.

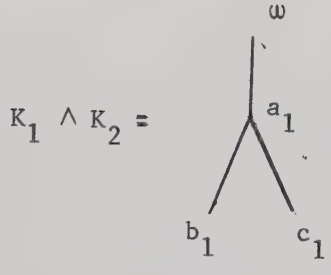


Figure 2

B) GENERATION DES TREILLIS DE CATALOGUES

Composition de cartes.

Soient n cartes $C_1 = (X_1, H_1, V_1)$, $C_2 = (X_2, H_2, V_2)$, ..., $C_n = (X_n, H_n, V_n)$. On suppose les X_i disjoints 2 à 2 et $V_i \cap V_j = \{\omega\}$ si $i \neq j$.

Soit A n'appartenant à aucun X_i et coll (A) = $\{a_1, \ldots, a_n\}$ disjoint avec chaque V_i.

La carte (X, H, V) ainsi définie :

$X = \{A\} \cup X_1 \cup X_2 \ldots \cup X_n$

H : $\forall x \in X : A \, H \, x$

$x, y \in X \quad x, y \neq A$

$x \, H \, y \leftrightarrow \exists i : x, y \in X_i \quad \text{et} \quad x \, H_i \, y$

$V = V_1 \cup V_2 \ldots \cup V_n \cup \{a_1, \ldots, a_m\}$

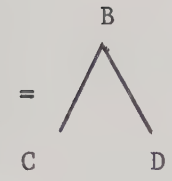
sera notée $A^m \, C_1 \, C_2 \ldots C_n$.

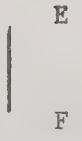
Catalogues de $T(A^1 C_1 C_2 \ldots C_n)$

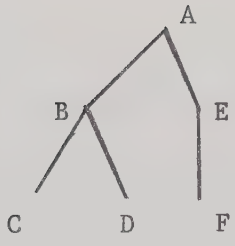
Soit un catalogue non nul de $T(A^1 C_1 C_2 \ldots C_n)$. Par la définition précédente les éléments d'une chaîne ne peuvent appartenir à des collections liées à plus d'un C_i. On note K_i le catalogue formé des chaînes dont les éléments appartiennent à des collections liées aux éléments de C_i.

K sera noté $a_1 \, K_1 \, K_2 \ldots K_n$.

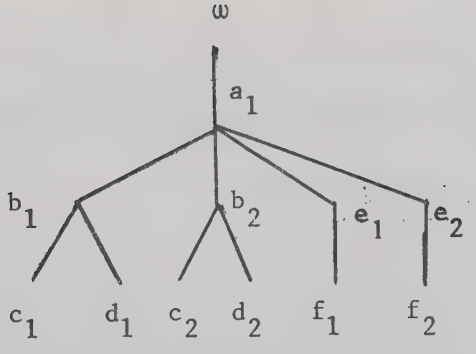
Exemple :

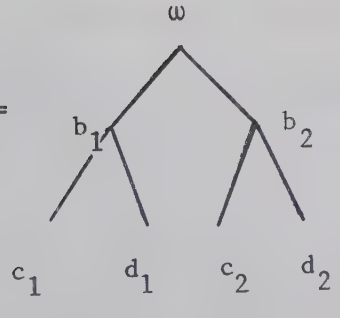
$C_1 =$ 

$C_2 =$ 

$A^1C_1C_2 =$ 

où card (coll (A)) = 1

$a_1K_1K_2 =$ 

$K_1 =$ 

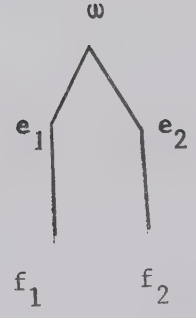
$K_2 =$ 

Figure 3

Proposition B1

$$T(A^1 C_1 C_2 \ldots C_n) \tilde{=} T(C_1) * T(C_2) * \ldots * T(C_n)$$

Démonstration

On a vu que les catalogues non nuls de $T(A^1 C_1 C_2 \ldots C_n)$ s'écrivent $a_1 K_1 K_2 \ldots K_n$ où $K_i \in T(C_i)$ et $K_i \neq 0$. On retrouve donc bien le produit contracté.

T étant un ensemble ordonné, T^m désignera le produit direct de m fois T.

Proposition B2

$$T(A^m C_1 C_2 \ldots C_n) \tilde{=} (T(A^1 C_1 C_2 \ldots C_n))^m$$

Démonstration

Les catalogues de $T(A^m C_1 C_2 \ldots C_n)$ peuvent s'écrire $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ où chaque α_i est un catalogue $a_i K_i$ d'un treillis $T(A^1 C_1 \ldots C_n)$ ou 0. On retrouve donc le produit direct.

Théorème B3

Les treillis de catalogues sont isomorphes aux treillis obtenus par un nombre fini d'applications des deux opérations suivantes : élévation à la puissance et produit contracté, à partir de 2^1.

C'est une conséquence immédiate des propriétés précédentes.

Il s'ensuit que les treillis de catalogues sont des cas particuliers des treillis CD définis dans la partie précédente.

C) DECOMPOSITION UNIQUE ET CARTES EQUIVALENTES

Deux cartes C_1 et C_p sont dites équivalentes s'il existe une suite de cartes C_2, C_3, ..., C_{p-1} telles que C_i et C_{i+1} pour i = 1, 2, ..., p-1 sont dans l'une des situations suivantes :

1) Il y a isomorphisme entre Arb(C_i) et Arb(C_{i+1}) et les collections liées aux sommets qui se correspondent par l'isomorphisme ont même cardinal.

2) L'une des arborescences est (X, H), l'autre (X-A, H') où card (coll (A)) = 1 et H' est l'ordre induit sur X-A à partir de H.

3) L'une des arborescences est (X, H), l'autre (X U {E} - {A, B}, H') où H est tel que tout élément comparable à A est comparable à B, et réciproquement, card (coll (E)) = card (coll (A)) × card (coll(B)), et H' est l'ordre induit à partir de H en enlevant A, et remplaçant B par E.

Exemple :

Plaçons aux noeuds des arborescences de C_1 et C_2 les cardinaux des collections correspondantes :

Figure 4

2) Supprime A où card (coll (A)) = 1.

3) Regroupe B et C avec card (coll (B)) = 2, card (coll (C)) = 8.

Théorème C1

$T(C_1) \tilde{=} T(C_2)$ si et seulement si C_1 et C_2 sont équivalentes.

Démonstration

Il est clair que si C_1 et C_2 sont équivalentes, $T(C_1) \tilde{=} T(C_2)$.

Démontrons la réciproque :

Soit $T(C_1) \tilde{=} T(C_2)$

La propriété est vraie si $T(C_1) \tilde{=} 2^1$

Supposons la vraie si $T(C_1)$ n'a pas plus de n éléments et montrons la pour n + 1.

Tout d'abord, il peut ne pas exister de treillis de catalogues de n + 1 éléments
Le problème est alors résolu.

Sinon, deux cas se présentent :

- $T(C_1)$ est le résultat d'un produit contracté.

$T(C_1)$ ne peut provenir d'un produit direct. On peut donc décomposer $T(C_1)$ de manière unique en ensembles ordonnés irréductibles pour $*$ et qui sont des treillis de catalogues.

$$T(C_1) \tilde{=} T(D_1) * T(D_2) \ldots * T(D_m)$$

$$T(C_2) \tilde{=} T(E_1) * T(E_2) \ldots * T(E_m)$$

D'où $C_1 = M^1N^1 \ldots P^1D_1D_2 \ldots D_m$

$C_2 = M'^1N'^1 \ldots Q'^1E_1E_2 \ldots E_m$.

Par hypothèse de récurrence les cartes D_1, D_2, ..., D_m sont équivalentes aux cartes E_1 ... E_m pour une permutation convenable.

Donc C_1 et C_2 sont équivalentes.

- $T(C_1)$ est le résultat d'un produit direct. Puisque c'est un treillis de catalogues, on peut l'écrire $T(C_1) \cong (T(D))^m$ où $T(D)$ est irréductible pour le produit direct.

On peut écrire

$$C_1 = M^x N^y \ldots P^z F_1 F_2 \cdot F_n$$

$$C_2 = M'^{x'} N'^{y'} \ldots Q'^{z'} G_1 G_2 \ldots G_n$$

où $x \times y \ldots \times z = x' \times y' \ldots \times z' = m$.

Or $P^1 F_1 F_2 \ldots F_n$ et $Q'^1 G_1 \ldots G_n$ sont équivalentes.

Donc C_1 et C_2 sont équivalentes.

D) TREILLIS DE CATALOGUES DE MEME ESPECE

Définition

Deux treillis de catalogues T_1 et T_2 sont dits de même espèce s'il existe deux cartes C_1 et C_2 d'arborescences (X, H_1) et (X, H_2), avec les mêmes collections liées, telles que $T_1 \cong T(C_1)$, $T_2 \cong T(C_2)$.

Théorème D1

Deux treillis de catalogues sont de même espèce si et seulement si ils ont le même nombre d'atomes.

Démonstration

1) Soient deux treillis de catalogues T_1 et T_2 de même espèce.

Il est évident que le nombre d'atomes est égal au produit des cardinaux des collections liées.

Ainsi, T_1 et T_2 ont même nombre d'atomes.

2) Soient T_1 et T_2, treillis de catalogues de même nombre d'atomes. On a $T_1 = T(C_1)$, $T_2 = T(C_2)$.

- Si pour un élément de $Arb(C_1)$ ou de $Arb(C_2)$ autre que la racine, le cardinal de la collection liée est 1, on peut, par le théorème C1, supprimer cet élément. On obtient des treillis $T(C'_1)$, $T(C'_2)$ respectivement isomorphes à T_1, T_2.

- Si pour un élément de $Arb(C_1)$ ou de $Arb(C_2)$, le cardinal de la collection liée n'est pas un nombre premier, on peut, par C1, remplacer cet élément par plusieurs éléments de même comparabilité dont le cardinal de la collection liée est premier. On obtient des treillis $T(C''_1)$, $T(C''_2)$ respectivement isomorphes à $T(C'_1)$, $T(C'_2)$ donc à T_1, T_2.

- Si seulement l'une des deux arborescences, $Arb(C''_1)$, $Arb(C''_2)$ a une racine dont le cardinal de la collection égale 1, on adjoint à l'autre une racine de cardinal 1. On obtient C'''_1, C'''_2 avec $T_1 \cong T(C'''_1)$, $T_2 \cong T(C'''_2)$.

Ainsi, on a 2 cartes C'''_1, C'''_2 qui ont pour cardinaux des collections liées les nombres premiers de la décomposition du nombre d'atomes de $T(C_1)$ et $T(C_2)$ avec en plus éventuellement une autre collection, de cardinal 1. On peut à un isomorphisme près, écrire que $Arb(C'''_1)$ et $Arb(C'''_2)$ sont construites sur le même ensemble X. La décomposition en facteurs premiers étant unique, il s'ensuit que T_1 et T_2 sont de même espèce.

TROISIEME PARTIE

CHAPITRE II

Restructuration des catalogues

A) DEFINITION DE LA RESTRUCTURATION

Soient deux cartes $C_1 = (X, H_1, V)$ et $C_2 = (X, H_2, V)$ avec les mêmes collections liées.

Une restructuration $R_{C_1C_2}$ est une application de $T(C_1)$ dans $T(C_2)$ telle que :

$$R_{C_1C_2}(\emptyset) = \emptyset$$

- Si F est un atome de $T(C_1)$, $R_{C_1C_2}(F)$ est l'atome de $T(C_2)$ formé en tant que fiche, des mêmes éléments que F.

- $R_{C_1C_2}(K) = \bigvee_{F \leq K} R_{C_1C_2}(F)$ où les F sont les atomes de K.

Notons qu'ainsi une restructuration est parfaitement définie puisque tout K de $T(C_1)$ est union d'atomes.

On utilisera dans la suite la lettre F pour désigner une fiche.

Exemples :

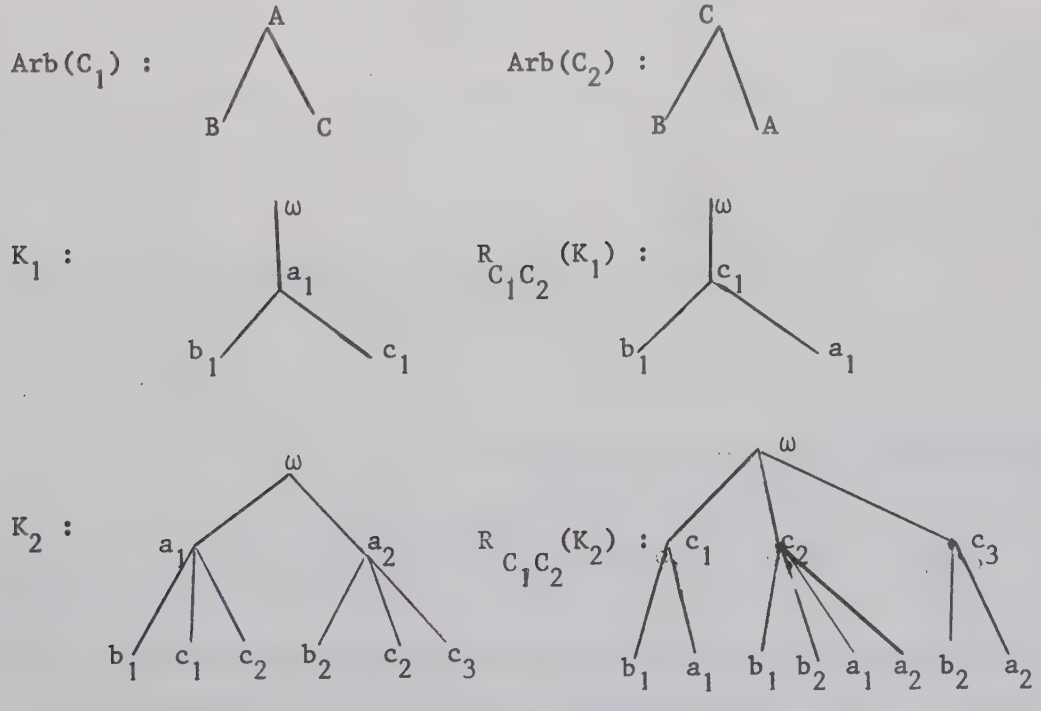


Figure 1

On remarque que dans le second exemple, le nombre de fiches extraites du catalogue est passé de 4 à 6.

Les treillis $T(C_1)$ et $T(C_2)$ sont de même espèce par définition. Ainsi, il existe une restructuration du treillis de catalogues T_1 dans le treillis de catalogues T_2 si et seulement si T_1 et T_2 ont le même nombre d'atomes.

Proposition A1

$$R_{C_1C_2}(1) = 1$$

Démonstration

L'élément universel de $T(C_1)$ est l'union de tous les atomes. Il s'ensuit que $R_{C_1C_2}(1)$ est l'union de tous les atomes de $T(C_2)$ donc égal à 1.

Proposition A2

$R_{C_1C_2}$ est une application croissante.

Démonstration

Soit $K_1 \leq K_2$

Il est clair que $\underset{F \leq K_1}{V} R_{C_1C_2}(F) \leq \underset{F \leq K_2}{V} R_{C_1C_2}(F)$

On notera de plus que le nombre de fiches de $R_{C_1C_2}(K)$ est supérieur ou égal à celui de K.

Seconde définition d'une restructuration

$R_{C_1C_2}$ est une application qui à K_1 de $T(C_1)$ fait correspondre $K_2 = R_{C_1C_2}(K_1)$ de $T(C_2)$, défini ainsi :

- une chaîne est une chaîne maximale de K_2 si et seulement si les éléments de cette chaîne appartiennent à une même fiche extraite de K_1.

Les deux définitions sont évidemment équivalentes.

Produit de 2 restructurations

$R_{C_2'C_3}\ (R_{C_1C_2}\ (K_1))$ n'a de sens que si $K_1 \in T(C_1)$ et $C_2 = C_2'$

On notera $R_{C_2C_3}\ R_{C_1C_2}\ (K_1)$

Ce produit n'est pas en général une restructuration. Si c'en est une, c'est naturellement $R_{C_1C_3}$.

Il est clair que pour tout $K_1 \in T(C_1)$, $R_{C_1C_3}\ (K_1) \leq R_{C_2C_3}\ R_{C_1C_2}\ (K_1)$

On écrira $R_{C_1C_3} \leq R_{C_2C_3}\ R_{C_1C_2}$

Notation

On note $R = R_{C_1C_2}$ et $R' = R_{C_2C_1}$.

R est 2n stationnaire si quels que soient les nombres de a_i, b_i, ..., d_i dans V et quel que soit $K \in T(C_1)$

$$(R'.R)^{n+1}\ (K) = (R'.R)^n\ (K)$$

R est 2n+1 stationnaire si dans les mêmes conditions

$$R.(R'R)^{n+1}\ (K) = R(R'R)^n\ (K)$$

Il est clair que si R est n stationnaire, R' est n+1 stationnaire.

B) CARACTERISATIONS DES RESTRUCTURATIONS O-STATIONNAIRES

O-stationnaires

Les arborescences des cartes C_1 et C_2 sont (X, H_1) et (X, H_2).

Si pour tout A, B $\in$ X, A H_1 B entraîne A H_2 B ou B H_2 A, on dit que $R_{C_1C_2}$ conserve la comparabilité.

Si quel que soit le nombre des a_i, b_i, c_i, ... dans V, et quel que soit $K_1 \in T(C_1)$, si $R_{C_1C_2}\ (K_1)$ a le même nombre de fiches extraites que K_1, on dit que $R_{C_1C_2}$ conserve le nombre de fiches.

Théorème B1

Les propositions suivantes sont équivalentes :

A) $R_{C_1C_2}$ conserve la comparabilité

B) $R_{C_1C_2}$ conserve le nombre de fiches

C) $R_{C_1C_2}$ est O-stationnaire

D) $R_{C_1C_2}$ est un Λ-homomorphisme

E) $R_{C_1C_2}$ est injective.

Démonstration

On montre A → B → C → D → E → A.

A → B

$R_{C_1C_2}$ = R conserve la comparabilité. Soit $K_1 \in T(C_1)$

Tout d'abord il est évident que si F est une fiche extraite de K_1, alors R(F) en est une de $R(K_1)$.

Donc le nombre de fiches extraites de K_1 est inférieur ou égal à celui de $R(K_1)$.

Soit d'autre part $R(F) \leq R(K_1)$. Montrons que $F \leq K_1$.

Si α est une chaîne maximale de F, les éléments de α font partie d'une chaîne maximale β de R(F) puisque R conserve la comparabilité. $R(K_1)$ étant l'union des $R(F_i)$ pour $F_i \leq K_1$, β est une chaîne maximale d'au moins un $R(F_i)$. Ainsi α est une chaîne maximale de F_i et donc de K.

Chaque chaîne maximale de F étant une chaîne maximale de K, il s'ensuit que F est une fiche extraite de K ce qui termine la démonstration.

B → C

R conserve le nombre de fiches, donc

$$R'R(K) = \bigvee_{R(F) \leq R(K)} R'R(F)) = \bigvee_{F \leq K} R'R(F) = \bigvee_{F \leq K} F = K$$

C → D

Pour toute application R croissante on sait que $R(K_1 \wedge K_2) \leq R(K_1) \wedge R(K_2)$.

Il suffit de montrer l'inégalité inverse.

Soit une fiche $R(F) \leq R(K_1) \wedge R(K_2)$.

$R(F) \leq R(K_1)$ donc $R'R(F) = F \leq R'(R(K_1)) = K_1$

Donc $F \leq K_1 \wedge K_2$ et $R(F) \leq R(K_1 \wedge K_2)$.

D → E

Soit $R(K_1) = R(K_2)$ et la fiche $F \leq K_1$

$R(K_1 \wedge F) = R(F)$

$R(K_2 \wedge F) = R(K_2) \wedge R(F) = R(K_1) \wedge R(F) = R(F)$

Donc $K_2 \wedge F \neq 0$ et $F \leq K_2$

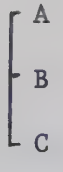
Donc $K_1 \leq K_2$, on aurait de même $K_2 \leq K_1$

E → A

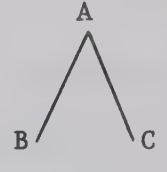
On va montrer que toute restructuration, qui ne conserve pas la comparabilité, n'est pas injective. Si l'arborescence de la carte n'a que 3 éléments, on n'a, à un isomorphisme près, que ces 2 situations possibles :

1ère situation

$Arb(C_1)$:

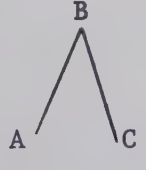


$Arb(C_2)$:



2ème situation

$Arb(C_1)$:



$Arb(C_2)$:

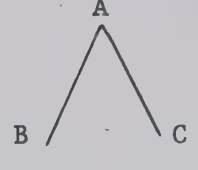
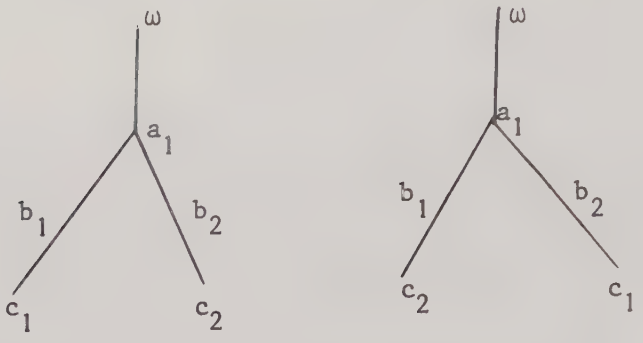


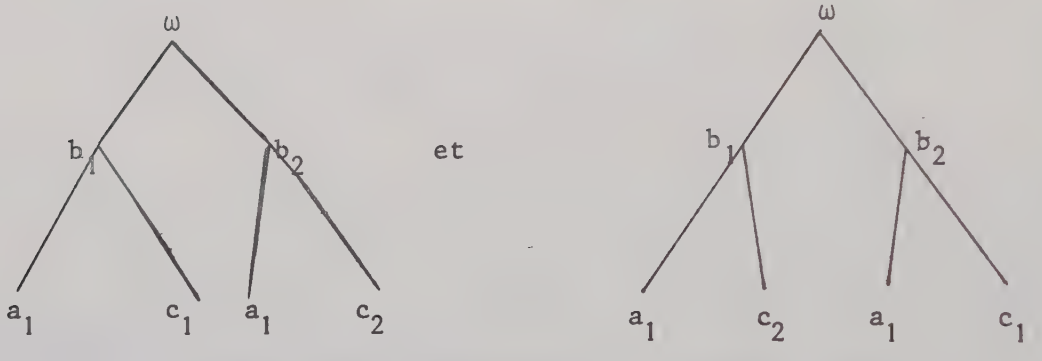
Figure 2

Dans la première situation, les catalogues



ont même restructuré

Dans la deuxième situation, on prend les catalogues



Si l'arborescence a plus de trois éléments, on trouve B et C par exemple comparables dans $Arb(C_1)$ mais pas dans $Arb(C_2)$. Le contre-exemple se déduit alors de l'un des précédents où seuls B et C jouent un rôle, en prenant un catalogue avec un seul a_i, un seul d_i, ...

Application

Il est clair que si $R_{C_1C_2}$ et $R_{C_2C_3}$ sont O-stationnaires, alors $R_{C_1C_3}$ est une restructuration O-stationnaire et $R_{C_1C_3} = R_{C_2C_3} \cdot R_{C_1C_2}$.

C) RESTRUCTURATIONS 1-STATIONNAIRES

Avant de caractériser ces restructurations, examinons d'abord les restructurations surjectives.

On continuera d'utiliser les notations $R = R_{C_1C_2}$; $R' = R_{C_2C_1}$

Théorème C1

Les propositions suivantes sont équivalentes :

C) R est O-stationnaire.

F) R' est surjective de $T(C_2)$ dans $T(C_1)$.

G) R' est un V-homomorphisme.

Démonstration

On montre G ↔ C ↔ F

G → C

$$R(K) = \bigvee_{F \leq K} R(F) \text{ par définition}$$

Si R' est un V-homomorphisme, on a :

$$R'R(K) = \bigvee_{F \leq K} R'R(F) = \bigvee_{F \leq K} F = K$$

C → G

Puisque A est équivalent à C, on montre A → G.

Pour une application R' croissante, on sait que

$$R'(K_1 \vee K_2) \geq R'(K_1) \vee R'(K_2)$$

Soit maintenant α une chaîne maximale de $R'(K_1 \vee K_2)$. R' n'ajoute pas de comparabilités donc les éléments de α sont une partie d'une chaîne maximale de $K_1 \vee K_2$ soit de K_1 par exemple.

β étant une chaîne maximale de K_1, α sera une chaîne maximale de $R'(K_1)$ ce qui montre l'inégalité dans l'autre sens.

C → F

Soit $K \in T(C_1)$. K est atteint par R' puisque $R'(R(K)) = K$.

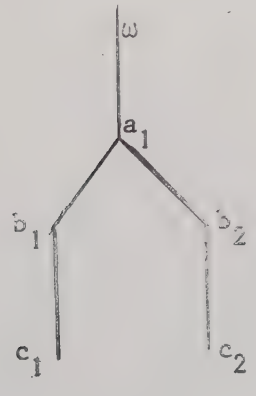
F → C

On va en fait montrer F → A.

Si R ne conserve pas la comparabilité, c'est que R' ajoute des comparabilités.

Pour une carte à 3 éléments A, B, C on n'a que les 2 situations possibles vues dans la démonstration de E → A : rappelons qu'ici $R' = R_{C_2C_1}$

Dans la 1ère situation



Dans la deuxième situation

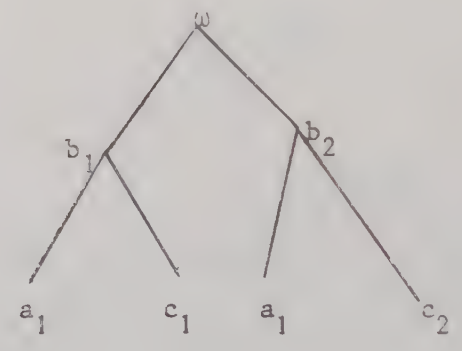


Figure 3

ne peuvent être atteints.

Pour des cartes à plus de 3 éléments, on trouve B, C par exemple comparables dans C_1, pas dans C_2. Le contre-exemple se déduit des précédents en prenant des catalogues avec un seul a_i, un seul d_i, ...

Application C2

Par G), il est clair que si $R_{C_1C_2}$ et $R_{C_2C_3}$ sont surjectives, $R_{C_1C_3}$ est une restructuration surjective et $R_{C_1C_3} = R_{C_2C_3} \cdot R_{C_1C_2}$.

Application C3

Puisque R est 0-stationnaire, il est clair que R' est 1-stationnaire. Toutefois il y a d'autres restructurations 1-stationnaires.

Exemple des restructurations S.I.

Une restructuration S.I. est une restructuration qui peut se décomposer en une surjective suivie d'une injective.

Ainsi on démontre aisément que $R_{C_1C_3}$ est S.I. où

$$R_{C_1C_3} = R_{C_2C_3} \cdot R_{C_1C_2} \text{ avec}$$

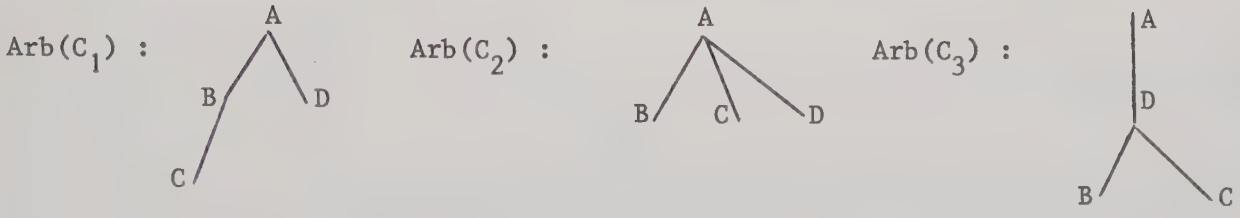


Figure 4

Proposition C4

Les S.I. sont des 1-stationnaires.

Démonstration

Soit $R_{C_1C_3} = R_{C_2C_3} \cdot R_{C_1C_2}$ où $R_{C_1C_2}$ est surjective et $R_{C_2C_3}$ est injective.

$$R_{C_1C_3}\ R_{C_3C_1}\ R_{C_1C_3} \leq (R_{C_2C_3}\ R_{C_1C_2})\ (R_{C_2C_1}\ R_{C_3C_2})\ (R_{C_2C_3}\ R_{C_1C_2})$$

par suite de la remarque faite à propos de la définition du produit de restructuration

Or

$$R_{C_1C_2}\ R_{C_2C_1} = R_{C_2C_2},\ R_{C_3C_2}\ R_{C_2C_3} = R_{C_2C_2}$$

Donc

$$R_{C_1C_3}\ R_{C_3C_1}\ R_{C_1C_3} \leq R_{C_2C_3}\ R_{C_1C_2} = R_{C_1C_3}$$

Donc

$$R_{C_1C_3}\ R_{C_3C_1}\ R_{C_1C_3} = R_{C_1C_3}$$

Caractérisation algébrique des 1-stationnaires

Soit maintenant $R = R_{C_1C_2}$

On note $\underset{R}{\text{Sup}}\ (K)$ l'union des catalogues K' tels que R(K') = R(K).

Proposition C5

R est 1-stationnaire si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{H)} \ \underset{R}{\text{Sup}}\,(K) = R'R(K) \text{ pour tout } K \in T(C_1) \\ \text{I)} \ R(K_1) = R(K_2) \rightarrow R(K_1 \vee K_2) = R(K_1) \end{cases}$$

Démonstration

- Si on a H et I

$RR'R(K) = R(\underset{R}{\text{Sup}}(K)) = R(K)$

- Si R est 1-stationnaire

Chaque K_i tel que $R(K_i) = R(K)$ est $\leq R'R(K)$.

Donc $\underset{R}{\text{Sup}}(K) \leq R'R(K)$.

Soit maintenant une chaîne maximale α de $R'R(K)$. Les éléments de α appartiennent à une fiche F extraite de R(K).

$R'(F) \leq R'R(K)$

$K \leq R'R(K)$

Donc $K \vee R'(F) \leq R'R(K)$

et $R(K \vee R'(F)) \leq RR'R(K) = R(K)$.

Ainsi $K \vee R'(F)$ est un catalogue K_i tel que $R(K_i) = R(K)$ d'où

$K \vee R'(F) \leq \underset{R}{\text{Sup}}\,(K)$

α étant une chaîne maximale de $R'(F)$, α est une chaîne maximale de $\underset{R}{\text{Sup}}\,(K)$, ce qui montre H).

- Soient enfin K_1 et K_2 tels que $R(K_1) = R(K_2)$

$K_1 \vee K_2 \leq R'R(K_1)$

$R(K_1 \vee K_2) \leq RR'R(K_1) = R(K_1) = R(K_2)$ d'où I).

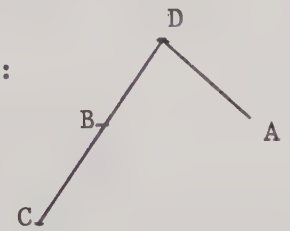
Conjectures

1) Une restructuration R_{C_1,C_2} est 1-stationnaire si et seulement si :

quels que soient A, B comparables dans C_2 pas dans C_1, tous les éléments comparables à A et B dans C_1 appartiennent dans C_2 à une même chaîne qui contient aussi A et B.

Exemple :

Arb (C_1) :



Arb (C_2) :

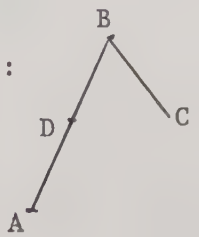


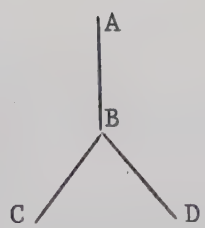
Figure 5

Parmi les cartes à 4 éléments, c'est à un isomorphisme près, la seule 1-stationnaire qui ne soit pas S.I.

2) $R_{C_1C_2}$ est 2-stationnaire si et seulement si $R_{C_1C_2}$ ou $R_{C_2C_1}$ est 1-stationnaire.

Exemple :

Arb (C_1) :



Arb (C_2) :

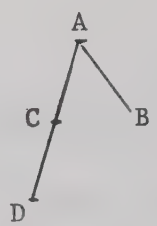


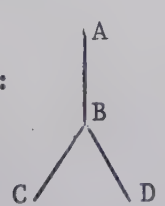
Figure 6

Parmi les cartes à 4 éléments, c'est à un isomorphisme près, la seule 2-stationnaire qui ne soit pas 1-stationnaire.

Il n'y a pas, parmi les cartes à 4 éléments, d'exemple de restructuration 3-stationnaire qui ne soit pas 2-stationnaire.

Pour une seule d'entre elles, dont on sait qu'elle n'est pas 3-stationnaire, il n'a pu être déterminé si elle était n-stationnaire pour un n fini :

Arb (C_1) :



Arb (C_2) :

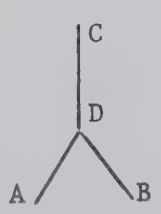
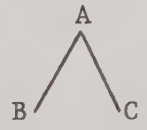


Figure 7

D) LES ∞-STATIONNAIRES

Une restructuration R sera dite ∞-stationnaire si, quel que soit i, on peut trouver un catalogue K, en accroissant éventuellement les cardinaux des collections liées aux cartes, tel que $(R'R)^i(K) \neq (R'R)^{i+1}(K)$.

Exemple :

Arb (C_1) : 

Arb (C_2) :

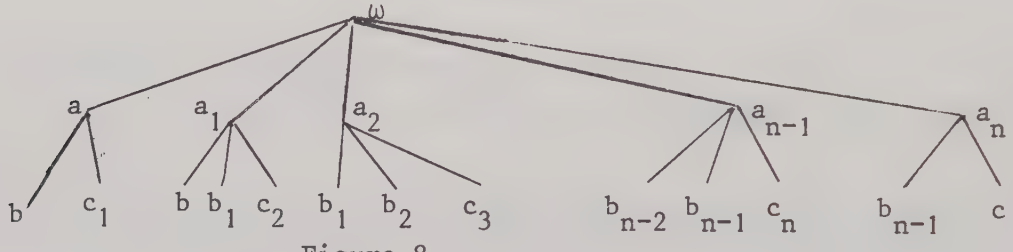
K : 

Figure 8

$(R'R)^{n-1}(K) \neq (R'R)^n(K)$ car la fiche composée de a, b, c apparaît pour la première fois dans $(R'R)^n(K)$.

Proposition D1

Dans une restructuration R_{C_3,C_4}, si C_3 contient 3 éléments ordonnés comme A, B, C dans Arb(C_1) de la figure 8 et C_4 contient ces 3 mêmes éléments ordonnés comme A, B, C dans Arb(C_2) de la figure 8, alors R_{C_1,C_2} est ∞-stationnaire.

Le contre-exemple se déduit en effet du précédent en prenant 1 comme cardinal des collections liées aux autres éléments de la carte que A, B, C.

TROISIEME PARTIE

CHAPITRE III

Minimisation de la place occupée par un catalogue à carte linéaire

A) PROBLEME POSE

On ne s'intéresse ici qu'aux catalogues dont la carte est une chaîne.

Soit C = (X, *H*, V) une telle carte et K $\in$ T(C).

Supposons que X = {A, B, ..., D, E}. On note $r_{AB...DE}$ le nombre de fiches de K. Si on enlève de K tous les éléments de la collection liée à E, alors on note $r_{AB...D}$ le nombre de fiches distinctes restantes. On définit ainsi successivement $r_{AB...DE}$, $r_{AB...D}$, ..., r_{AB}, r_A.

En effectuant des restructurations bijectives (c'est à dire telles que la nouvelle carte soit aussi une chaîne), on définit r_α pour tous les α qui sont des concaténations de lettres distinctes de X.

Considérons par ailleurs que sur un organe technologique donné (papier ou bande ou disque) les éléments de la collection liée à A occupent tous la même place , mesurée par un réel p_A. De la même manière p_B mesure la place occupée par les éléments de la collection liée à B, et ainsi de suite.

Si dans la carte C on a A*HBH* ... *HDHE*, alors la place occupée par K, notée $[AB \ldots DE]_K$ ou même $[AB \ldots DE]$ si on sait de quel catalogue il s'agit, est égale à :

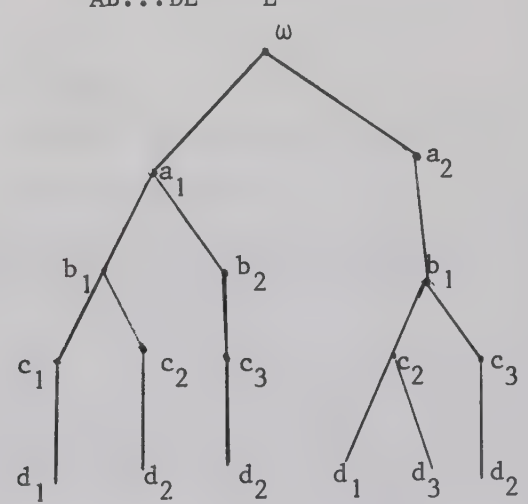
$$[AB \ldots DE] = r_A \times p_A + r_{AB} \times p_B + \ldots r_{AB...DE} \times p_E$$

Exemple :

Arb (C) :

Figure 1

K :



$r_A = 2 \quad r_{AB} = 3 \quad r_{ABC} = 5 \quad r_{ABCD} = 6$

$[ABCD] = 2p_A + 3p_B + 5p_C + 6p_D$

Le problème est de trouver la permutation de la carte telle que le catalogue occupe le moins de place possible.

Proposition A1

Si α est une suite d'éléments de X, r_α est indépendant de l'ordre dans cette suite.

Changer l'ordre des éléments de la suite revient en effet à effectuer une restructuration injective et ceci ne change pas le nombre de fiches.

Proposition A2

Si $[AB \ldots DE] \leq [g]$ pour chaque permutation g de $\{A,B, \ldots, D,E\}$ alor $[AB \ldots D] \leq [h]$ pour chaque permutation h de $\{A,B, \ldots, D\}$.

Ceci découle du fait que

$$[AB \ldots DE] = [AB \ldots D] + r_{AB\ldots DE} \times p_E$$

A1) nous montre que pour faire la recherche de la meilleure permutation, il faut connaître r_α pour chaque partie α de X.

A2) permettra d'éviter de calculer la place occupée pour certaines permutations qu'on sait a priori moins bonnes que d'autres.

Si on dispose d'un catalogue pour la permutation AB ... DE de X, il est aisé de trouver r_A, r_{AB}, ..., $r_{AB\ldots D}$, $r_{AB\ldots DE}$. Le calcul de tous les autres r_α demande de nombreuses manipulations de disques ou bandes, et est fort long. Nous allons donc essayer d'éviter ces calculs en cherchant une valeur "probable" de ces r_α.

On supposera qu'on connaît r_A, r_B, ..., r_E.

Autre présentation du problème

Appelons parallélépipède une partie de N^p, produit des p segments $[1, r_{A1}]$, $[1, r_{A2}]$, ..., $[1, r_{Ap}]$.

Un catalogue à carte linéaire est clairement une partie d'un parallélépipède.

Sachant que les projections sur chacun des axes occupent tous les segments donnés, et connaissant les nombres d'éléments des projections sur certains sous-espaces, il faut trouver ces nombres sur d'autres sous-espaces.

L'exemple de la figure 2 montre bien l'indépendance.

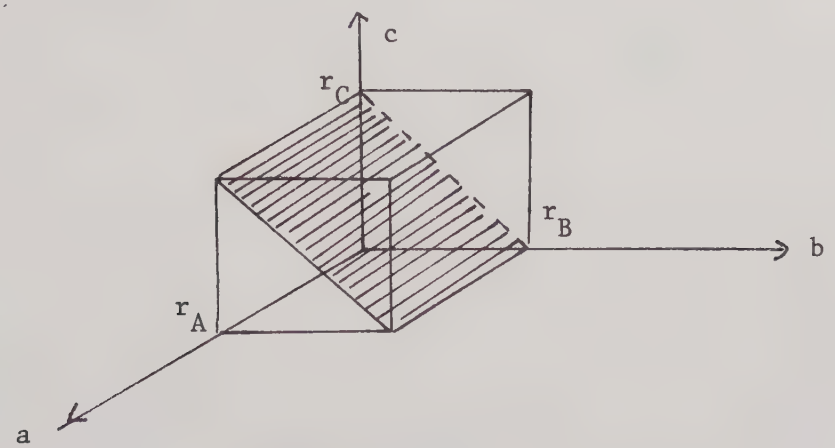


Figure 2

$r_{AB} = r_A \times r_B$ et $r_{AC} = r_A \times r_C$ et r_{BC} est voisin de $\sqrt{r_B^2 + r_C^2}$
alors que pour le parallélépipède plein, on a aussi
$r_{AB} = r_A \times r_B$, $r_{AC} = r_A \times r_C$ mais $r_{BC} = r_B \times r_C$.

B) RESOLUTION PAR APPROXIMATION

On peut engendrer toutes les permutations en permutant successivement tous les couples d'éléments consécutifs.

D'abord si A et B sont les 2 premiers éléments de la carte, le fait de permuter A et B ne change pas r_{AB}.

Par contre, si on a la carte A-B- ... E-F-G, si on permute F et G on introduit un r_α inconnu qui est $r_{AB...EG}$ les autres n'ayant pas changé puisque

$r_{AB...EGF} = r_{AB...EFG}$.

On cherchera une valeur moyenne de $r_{AB...EG}$ en fonction de $r_{AB...E}$, r_F, r_G, $r_{AB...EF}$, $r_{AB...EFG}$.

Ce problème se ramène à la recherche d'une valeur moyenne de r_{AC} en fonction de r_A, r_B, r_C, r_{AB}, r_{ABC}.

On note $\overline{r_{AC}} = \theta(r_A, r_B, r_C, r_{AB}, r_{ABC})$.

Approximation de la fonction Θ

Considérons le catalogue suivant :

Sous a_1 il y a y_1 b_K

.
.
.

a_{r_A} ..... y_{r_A} b_K

On a

$1 \leq y_i \leq r_B$ pour $i = 1, \ldots, r_A$

et

$$\sum_{i=1}^{r_A} y_i = r_{AB}$$

Sous le premier b_i, il y a x_1 c_K

r_{AB} ^{ième} b_i .... $x_{r_{AB}}$ c_K

$1 \leq x_i \leq r_C$ pour $i = 1, \ldots, r_{AB}$

$$\sum_{i=1}^{r_{AB}} x_i = r_{ABC}$$

Appelons r_{a_iC} le nombre de c_K distincts sous a_i.

$$r_{AC} = \sum_{i=1}^{r_A} r_{a_iC}$$

Ne tenons pas compte pour le moment de la contrainte imposant qu'il y ait r_C c_i distincts dans le catalogue.

Cette approximation peut paraître grossière. Elle permet en tout cas de choisir les c_K indépendamment sous chaque b_j.
On verra ensuite comment faire intervenir la contrainte pour rectifier les résultats.

Moyenne de r_{AC}

a) On supposera d'abord les valeurs de x_i et y_j fixées.
On effectuera donc un premier calcul de moyenne portant sur le choix des c_K. $r_{a_i C}$ est d'autant plus gros que les c_K qu'on trouve sous des b_j distincts sont distincts. Afin d'avoir des formules de récurrence, on choisira les c_K l'un après l'autre, d'abord sous le premier b_j, puis sous le second, etc...

Notons Q_i la moyenne de $r_{a_i C}$.

Q_1 dépend de y_1, x_1, x_2, ... x_{y_1}

Q_2 dépend de y_2, x_{y_1+1}, x_{y_1+2}, ... $x_{y_1+y_2}$

et ainsi de suite.

Puisqu'on a décidé de choisir les c_K indépendamment sous chaque b_j et par conséquent sous chaque a_i, et que les indices correspondant à a_1 sont plus simples, c'est Q_1 qu'on calculera. Il est clair que les calculs pour Q_2, ... Q_{r_A} sont les mêmes .

b) On devra alors prendre la moyenne de $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{r_A}$ pour tous les r_{AB}-uples.

$(x_1, x_2, \ldots, x_{r_{AB}})$ tels que :

$$- \quad 1 \leq x_i \leq r_C \qquad i = 1, \ldots, r_{AB}$$

$$- \quad \sum_{i=1}^{r_{AB}} x_i = r_{ABC}$$

L'expression trouvée est fonction des y_j.

c) On prend la moyenne de l'expression trouvée pour tous les r_A-uples $(y_1, y_2, \ldots, y_{r_A})$ tels que :

$$- \quad 1 \leq y_i \leq r_B \qquad i = 1, \ldots r_A$$

$$- \quad \sum_{i=1}^{r_A} y_i = r_{AB}$$

Calculs proprement dits

a) M_{i+1}^{j} désigne le nombre de c_K distincts sous les i premiers b_K et dans les j premiers c_K du i+1ème.

Ainsi $M_1^\circ = 0$; $M_{i+1}^\circ = M_i^{x_i}$

$M_{i+1}^{j+1} = M_{i+1}^{j} + d_{i+1}^{j+1}$ où $d_{i+1}^{j+1} = 0$ si le c_K choisi figure déjà dans les M_{i+1}^{j} déjà choisis et =1 sinon.

Soit t_{i+1}^{j+1} l'indice du c_K choisi en j+1ème position sous le i+1ème b_K. C'est une variable aléatoire qui prend une valeur entière entre 1 et r_C **mais qui est distincte de** t_{i+1}^{1}, t_{i+1}^{2}, ..., t_{i+1}^{j}. Les autres valeurs sont équiprobables avec la probabilité $\frac{1}{r_C - j}$.

Prenons l'espérance mathématique par rapport à ces variables

$$\underset{t_1^1\, t_1^2 \ldots\, t_{y_1}^{x_{y_1}}}{E} M_{i+1}^{j+1} = \underset{t_1^1\, t_1^2 \ldots t_{y_1}^{x_{y_1}}}{E} M_{i+1}^{j} + \underset{t_1^1\, t_1^2 \ldots t_{y_1}^{x_{y_1}}}{E} d_{i+1}^{j+1}$$

Or M_p^q est indépendant du choix des c_K au delà du $q^{\text{ième}}$ sous le $p^{\text{ième}}$ b_K puisque les c_K sont choisis l'un après l'autre. On peut donc écrire :

$$\underset{t_1^1\, t_1^2 \ldots\, t_{i+1}^{j+1}}{E} M_{i+1}^{j+1} = \underset{t_1^1\, t_1^2 \ldots t_{i+1}^{j}}{E} M_{i+1}^{j} + \underset{t_1^1\, t_1^2 \ldots t_{i+1}^{j+1}}{E} d_{i+1}^{j+1}$$

Si $\overline{M_p^q}$ désigne $\underset{t_1^1 \ldots t_p^q}{E} M_p^q$, on a :

$$\overline{M_{i+1}^{j+1}} = \overline{M_{i+1}^{j}} + \underset{t_1^1 t_1^2 \ldots t_{i+1}^{j}}{E} \left(\underset{t_{i+1}^{j+1}}{E} d_{i+1}^{j+1} \right)$$

Or $d_{i+1}^{j+1} = 1$ avec la probabilité $\dfrac{r_C - M_{i+1}^{j}}{r_C - j}$

donc $\overline{M_{i+1}^{j+1}} = \overline{M_{i+1}^{j}} + \dfrac{r_C - \overline{M_{i+1}^{j}}}{r_C - j}$

Ceci est une équation aux différences qu'on résout d'abord pour un i fixé, par rapport à j.

En notant $N_i = M^{o}_{i+1}$ avec $N_o = 0$, vérifions qu'on obtient

$$\overline{M^{j+1}_{i+1}} = N_i + (j+1)\ \frac{r_C - N_i}{r_C}$$

En effet un tel résultat est vrai pour j = 0

S'il est vrai pour j, on a :

$$\overline{M^{j+1}_{i+1}} = N_i + j\ \frac{r_C - N_i}{r_C} + \frac{r_C - (N_i + j\ \frac{r_C - N_i}{r_C})}{r_C - j} = N_i + (j+1)\ \frac{r_C - N_i}{r_C}$$

$$Q_1 = \overline{M^{x}_{y_1}}_{y_1}$$

b) Il faut maintenant chercher la moyenne de $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{r_A}$ pour tous les r_{AB}-uples $(x_1, x_2, \ldots, x_{r_{AB}})$ répondant aux hypothèses.

On ne connaît pas de moyen de trouver analytiquement cette valeur. Les calculs à l'aide d'un ordinateur sont très longs. On se contente alors de remplacer chaque x_i par sa moyenne

$$\frac{r_{ABC}}{r_{AB}}.$$

Il vient donc :

$$N_{i+1} = N_i + \frac{r_{ABC}}{r_{AB}}\ \frac{r_C - N_i}{r_C}$$

On a une nouvelle équation aux différences

$$N_{i+1} = N_i\ (1 - \frac{r_{ABC}}{r_{AB} \cdot r_C}) + \frac{r_{ABC}}{r_{AB}}$$

$$\text{d'où } N_i = \frac{r_{ABC}}{r_{AB}} \cdot \frac{(1 - \frac{r_{ABC}}{r_{AB} \cdot r_C})^i - 1}{1 - \frac{r_{ABC}}{r_{AB} \cdot r_C} - 1} = r_C\ (1 - (1 - \frac{r_{ABC}}{r_{AB} \cdot r_C})^i)$$

c) Il faut maintenant chercher la moyenne de $N_{y_1} + N_{y_2} + \ldots + N_{y_{r_A}}$ pour tous les r_A-uples $(y_1, y_2, \ldots, y_{r_A})$ répondant aux hypothèses.

Là encore on se contente de remplacer chaque y_i par sa valeur moyenne $\frac{r_{AB}}{r_A}$. On obtient :

$$\overline{r_{AC}} \simeq r_A \cdot r_C \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{r_{ABC}}{r_{AB} \cdot r_C}\right)^{\frac{r_{AB}}{r_A}}\right)$$

Intervention de l'hypothèse sur l'utilisation de tous les r_C

On n'a pas fait intervenir le fait que tous les r_C devaient être utilisés. L'hypothèse n'intervient pas tellement quand r_{ABC} est voisin de $r_{AB} \cdot r_C$ car alors elle est presque automatiquement satisfaite. Sinon il faut transformer.

Soit la courbe de q, nombre moyen de c_K distincts sous p b_K.

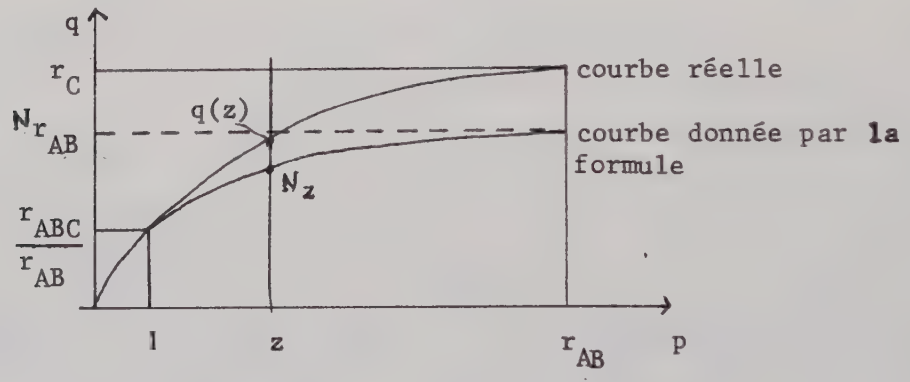


Figure 3

Si la valeur réelle en z est q(z) et la valeur donnée par la formule est N_z, on peut approximer q(z) par

$$N_z \times \frac{r_C}{N_{r_{AB}}} \quad \text{pour } z > 1.$$

Ce calcul est effectué, comme on l'a vu, pour $z = \frac{r_{AB}}{r_A}$.

Après cette correction on a donc :

$$\overline{r_{AC}} \simeq r_A \cdot r_C \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{r_{ABC}}{r_{AB} \cdot r_C}\right)^{\frac{r_{AB}}{r_A}}\right) \Big/ \left(1 - \left(1 - \frac{r_{ABC}}{r_{AB} \cdot r_C}\right)^{r_{AB}}\right)$$

C) VERIFICATION EXPERIMENTALE

Des programmes ont été faits [58] pour vérifier la précision obtenue. En prenant des catalogues au hasard, suffisamment gros pour que le hasard donne bien une valeur moyenne, pour des r_A, r_B, r_C, r_{ABC} fixés, r_{AB}, r_{AC}, r_{BC} ont été calculés par divers tris.

Donnons quelques exemples :

r_A	r_B	r_C	r_{AB}	r_{ABC}	r_{AC}	r_{AC} approximé par la formule
30	12	65	356	1500	1078	1069.44
50	8	39	394	1500	1066	1081.41
50	50	39	1141	1500	1066	1058.25
55	8	60	431	1500	1241	1233.39
55	62	60	1235	1500	1221	1215.01

Si les résultats sont très favorables pour des catalogues choisis au hasard, il est par contre possible de trouver un catalogue dont le r_{AC} est très loin de celui donné par les formules.

On a pu construire un exemple où $r_{AC} = 100$, alors que le r_{AC} approximé par la formule est 860.

Remarquons encore que θ est une fonction de r_B. Or les approximations utilisées ne tiennent pas compte de r_B.

L'expérience justifie ces approximations car sur des catalogues au hasard, ayant même r_A, r_C, r_{ABC}, r_{AC} varie peu avec r_B, comme on le voit sur le tableau précédent.

TABLE DES SIGNES, DES ABREVIATIONS ET DEFINITIONS

EXPLICATION OU NUMERO DE PAGE

Θ		100
a_*, A_*		59
a^*		72
$a \vee b$, $a \wedge b$, $A \vee B$, $A \wedge B$		6, 7
$a \prec b$		22
a^o, a^-		74
$a \vee^* b$, $a \wedge^* b$		25
$\{a, b, \ldots, e\}$	ensemble des éléments a, b, ..., e	
(a, b)	couple dans le produit cartésien	30
$[a, b]$	intervalle dans un ensemble ordonné	10
$\|a, b\|$	arête dans un graphe non orienté	18
$b \| a$	branche d'un ensemble ordonné	24
(T, U)	graphe : T ensemble des sommets U ensemble des arcs (ou arêtes)	18
$A \perp B$, $A \top B$, $A \perp\!\!\!\top B$, $A \leq B$		5
$\overline{A}$		12, 93
$\complement A$	complémentaire de A	
$A \times B$	produit cartésien des ensembles A et B	29
$A \cdot B$	produit direct des ensembles ordonnés A et B	29
$A \star B$	produit contracté des ensembles ordonnés A et B munis d'un élément nul 0	100
$A \cong B$	les ensembles ordonnés A et B sont isomorphes	100
associatif		13
AT, AT_x		59
AT_X		94
atomique		79
base des cycles		129

borne supérieure d'atomes 9, 78

branches, équivalentes, T-semblables d'en haut, d'en bas 23, 24

C complémenté 78

card(A) nombre d'éléments de l'ensemble A 122

caractéristique 139

catalogue, carte de catalogue 145

COA 79

COE 62

collection liée 145

complémenté 78

Comp(x) 18

connexité 28

correspondance des compléments 126

couverture, couvrir 22

cycle hamiltonien 106

(D1) (D2) ($D2^*$) (D3) ($D3^*$) 51

demi-treillis 4

dense 62

distributif 51

Ecoulement 134

Eléments premiers dans un PTD 70

Ensemble ordonné avec 0, 1 4

Ensemble ordonné d'interpolation 4

EOI : Ensemble ordonné d'interpolation 4

EOI modulaire libre 48

étiquette 139

Evaluation de 1ère, 2ème, 3ème espèce, positive 26, 27

Extension simple 36

Factorisation unique 109

Faiblement complémenté 78

Fermés d'un MPCI 76

Fermeture polaire	12
Fermeture transitive	17
Fiche	145
gradué	22
graphe de comparabilité	18
graphe des compléments	104
graphe série parallèle	133
hauteur	22
homomorphismes de $p^{ième}$ catégorie	37, 38
IM, Immergeable	79
Immersion	8
Inf(A)	7
Intervalle	9
Irréductible (élément)	44
Irréductible (ensemble)	109
I_x, I_X	10
L_E	9
ligne	22
m(E), M(E)	5
(M) (M1) (M2) (M3) (M4)	44, 50
min(E), maj(E)	5
modulaire au sens de G. Birkhoff, M. Benado	25, 26
MPCI : multitreillis pseudo-complémenté inférieurement	59
MPCI de Stone	63
MPCS : multitreillis pseudo-complémenté supérieurement	59
MTB : multitreillis de Boole	79
Multiarborescence	16
Multitreillis	6
OC	78
Orthocomplémenté	78

Ouvert d'un MPCS 75

Partie libre 5

Produit cartésien, direct 29

Produit contracté 100

P_x, P_X 10

Propriété d'échange 10

de Jordan Dedekind 22

Pseudo-complémenté 59

Pseudo-treillis distributif 67

PTD : Pseudo-treillis distributif 67

RC 78

Relativement complémenté 78

Relativement unicomplémenté 78

Restructuration de catalogues 156

RUC 78

SC 78

Section complémenté 78

Section unicomplémenté 78

Semi-complémenté 78

Semi-idéal 9

Semi-modulaire inférieurement, supérieurement, σ_1, σ'_1, σ_2, σ'_2 23

SeUC 78

Sup(A) 7

Treillis CD 122

Treillis simple 108

Très connexité 28

Unicomplémenté 78

UC 78

U_E 9

WC 78

BIBLIOGRAPHIE

Pour les parties 1 et 2, les Mathematics Reviews de Janvier 1948 à Janvier 1972 ont été consultées

OUVRAGES GENERAUX

[1] BARBUT M., MONJARDET B.

Ordre et classification. Algèbre et combinatoire.
Tomes 1 et 2, coll. Hachette Université, Hachette, Paris, 1970.

[2] BENZAKEN C., KUNTZMANN J.

Algèbre peu réversible
A paraître : Hermann, Paris, 1972.

[3] BERGE C.

Théorie des graphes et ses applications.
Dunod, Paris, 1958.

[4] BIRKHOFF G.

Lattice theory
3rd edition, American mathematical society colloquium publications, vol. XXV, A.M.S., Providence (R.I.), 1967.

[5] DUBREIL-JACOTIN M.L., LESIEUR L., CROISOT R.

Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques.
Gauthier Villars, Paris, 1953.

DEFINITION DES MULTITREILLIS. SEMI-MODULARITE ET MODULARITE

[6] BAER R.M., OSTERBY O.

Algorithms over partially ordered sets.
Nordisk Tidskr Informations behandling (BIT) 9 (1969), pp. 97-108.

[7] BENADO M.

Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de Schreier II (Théorie des multistructures).
Czechoslovak mathematical journal, Vol. 5, 6, (1955-1956), U373, pp. 308-344.

[8] BENADO M.

Remarques sur la théorie des multitreillis VI (Contribution à la théorie des structures algébriques ordonnées).
Mathematico cyzikalny Casopis, Rocnik 14 (1964), Cislo 3.

[9] BOUCHET A.

Etude combinatoire des ordonnés finis. Applications.
Thèse d'état, Grenoble, 1971.

[10] BOULAYE G.

Contribution à la théorie des treillis.
Thèse d'état, Grenoble, 1970.

[11] DEAN R.A., KELLER G.

Natural partial orders.
Canad. J. Math., 20 (1968), pp. 535-554.

[12] DERDERIAN J.C.

A completion for partially ordered sets.
Journal London Math. Soc., Vol. 44, part. 2 (Av. 1969), n° 174.

[13] DESCHIZEAUX P.

Synthèse de fonctions booléennes générales.
Thèse de docteur-ingénieur, Grenoble, 1967.

[14] GRATZER G.

Universal algebra.
Van Nostrand, Princeton (N.J.), 1968.

[15] HASKINS L., GUDDER S.

Height on posets and graphs.
A paraître dans Discrete Mathematics.

[16] JULLIEN P.

Contribution à l'étude des types d'ordre dispersés.
Thèse d'état, Marseille, 1969.

[17] KUNTZMANN J.

Extension aux relations de certaines notions algébriques.
C.R.A.S., t. 267 (1968) n°2, pp. 77-78.

[18] MAC ALISTER D.B.

On multilattice groups.
Proc. Camb. Phil. Soc. 61 (1965), pp. 621-638.

[19] MAC NEILLE H.M.

Partially ordered sets.
Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 42 (1937), pp. 416-460.

[20] WOLK E.S.

A note on the comparability graph of a tree.
Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 16 (1965), pp. 17-20.

MULTITREILLIS PSEUDO-COMPLEMENTES ET COMPLEMENTES

[21] ABBOTT J.C.

Semi boolean algebra.
Matematichki Vesnik 4, 19 (1967), pp. 177-198.

[22] BARROS (DE) C.M.

Filters in partially ordered sets.
Portugaliae Mathematica, Vol. 27, fasc. 2 (1968), pp. 87-98.

[23] BENADO M.

Bemerkungen zur theorie der Vielverbände.
Math. Nachr. 20 (1959), pp. 1-16.

[24] BENZAKEN C.

Contribution des structures algébriques ordonnées à la théorie des réseaux.
Thèse d'état, Grenoble, 1967.

[25] BYRNE L.

Two brief formulations of boolean algebra.
Bull. Amer. Math. Soc. (2) Vol. 52 (1946), pp. 269-272.

[26] CHEN C.C., GRATZER G.

Stone lattices, I, II, Construction theorems.
Canad. J. Math. 21 (1969), pp. 884-903.

[27] FRINK O.

Representations of boolean algebras.
Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 47 (1941), pp. 755-756.

[28] FRINK O.

Pseudo complements in semi-lattices.
Duke Math. J., Vol. 29 (1962), pp. 505-514.

[29] GRILLET P.A., VARLET J.C.

Complementedness conditions in lattices.
Bull. Soc. Roy. des Sci. de Liège, 36ème année, n° 11-12, (1967), pp. 628-642.

[30] MAC LAUGHLIN J.E.

Projectivities in relatively complemented lattices.
Duke Math. J., Vol. 18 (1951), pp. 73-84.

[31] ROBERT P., FERLAND J.

Généralisation de l'algorithme de Warshall.
R.I.R.O. 2ème année, R-1 (1968), pp. 71-86.

[32] SZASZ G.

On relatively complemented lattices.
Acta Sci. Math. Szeged 18 (1957), pp. 48-51.

[33] TREHEL M.

Etude des ensembles ordonnés pseudo-complémentés.
C.R.A.S., t. 274 (1972), pp. 699-702.

[34] VARLET J.

Contribution à l'étude des treillis pseudo-complémentés et des treillis de Stone.
Mem. Soc. Roy. des Sci. de Liège, 5ème série, t. 8, (1963), fasc. 4, 71 pages.

[35] VENKATANARASIMHAN P.V.

Ideals in semi lattices.
Journal Indian Math. Soc., Vol. 30, n° 1 (1966), pp. 47-53.

[36] VENKATANARASIMHAN P.V.

Pseudo complements in posets.
Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 28 n° 1 (1971), pp. 9-17.

PRODUIT CONTRACTE. TREILLIS CD

[37] BIRKHOFF G.

On the structure of abstract algebras.
Proc. Camb. Phil. Soc., 31 (1935), 4, pp. 433-454.

[38] CHANG C.C., JÓNSSON B., TARSKI A.

Refinement properties for relational structures.
Fund. Math. 55 (1964), pp. 249-281.

[39] CRAWLEY P., JÓNSSON B.

Direct decompositions of algebraic systems.
Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 69 (1963), pp. 541-547.

[40] DUBREIL-JACOTIN M.L., CROISOT R.

Equivalences régulières dans un ensemble ordonné.
Bull. Soc. Math., t. 80, (1952), pp. 11-35.

[41] GAROCHE F.

Treillis des constellations dans un graphe orienté.
Exposé au séminaire d'algèbre combinatoire et conception de l'I.M.A.G., séance du 26 avril 1971.

[42] JÓNSSON B.

The unique factorization problem for finite relational structures.
Colloq. Math. 14 (1966), pp. 1-32.

[43] JÓNSSON B, TARSKI A.

Direct decompositions of finite algebraic systems.
Notre Dame Mathematical lectures, Notre Dame, Indiana, n° 5 (1947), 64 pages.

[44] NAKAYAMA T.

Algebraic theory of lattices (en japonais).
Tokyo 1944, pp. 267-275 : Resolution into product form.

[45] NOVAK V., SCHMIDT J.

Direct decompositions of partially ordered sets with zero.
J. Reine Angew. Math. 239/240 (1969), pp. 97-108.

[46] TREHEL M.

Incompatibilité du produit direct et du produit contracté d'ensembles ordonnés finis possédant un élément nul et un élément universel.
C.R.A.S., t. 273, (1971), pp. 760-762.

[47] TREHEL M.

Graphe des compléments et classes de branches dans un ensemble ordonné fini résultant d'un produit contracté.
A paraître dans Discrete Mathematics.

CATALOGUES

[48] ABRIAL J.R., BAS J., BEAUME G., HENNERON G., MORIN R., VIGLIANO G.

Projet Socrate
Document interne I.M.A.G., Université de Grenoble, Août 1970.

[49] BLANCHARD P.

Edition d'un corpus sous format interne C.E.T.A.
Document interne G. TC-16, Centre d'Etudes pour la Traduction Automatique de Grenoble, Juin 1967.

[50] CODD E.F.

A relational model of data for large shared data banks.
Comm. of the A.C.M. Vol. 13 n° 6 (1970), pp. 377-387.

[51] DALEY R.C., NEUMANN P.C.

A general purpose file system for secondary storage.
Proc. IFIPS FALL-JOINT COMPUTER CONFERENCE.
Sportan Book, t. 27 (1965), pp. 213-229.

[52] DELOBEL C.

Propriété des opérateurs de fusion et de composition en traitement de l'information.
Séminaire d'algèbre appliquée et conception, de l'I.M.A.G., exposé à la séance du 13 mars 1972.

[53] DEL VIGNA C., DE LA FOUCHARDIERE

Etude d'un langage de commande pour fichiers linguistiques.
Collection des projets de 3ème année E.N.S.I.M.A.G., Grenoble 1968.

[54] HARRAND Y.

Traitement des files et des listes, par l'homme, par la machine.
Coll. Bibliothèque de l'automaticien, Dunod, Paris 1967.

[55] HAYS M., KAY M., KOZAK A.S., TAFT T.D.

A file of russian text on magnetic tape.
Document RM 5509 RADC, The Rand Corporation, Santa Monica, California, Oct. 1967.

[56] HSIAO D., HARARY F.

A formal system for information retrieval for files.
Comm. ACM, Vol. 13, (1970), n° 2, pp. 67-73.

[57] KAY M., ZIEHE T.

The catalog : a flexible data structure for magnetic tape.
Document RM 4645 PR, The Rand Corporation, Oct. 1965.

[58] LIOTARD B.

Minimisation de la place occupée par un fichier en machine.
Collection des rapports de stage. Institut de Programmation de Grenoble, Juin 1970.

[59] NAMIAN P.

Etude théorique de traitement des fichiers séquentiels en automatisme administratif.
Publ. interne, I.M.A.G., 1964-1965.

[60] PAIR C., QUERE A.

Définition et étude des bilangages réguliers.
Information and Control 13 (1968), pp. 565-593.

[61] TREHEL M.

Etude des treillis de catalogues.
R.I.R.O. 1ère année, n° 4, (1967), pp. 39-49.

[62] TREHEL M.

Catalogues et pseudo-produit de treillis.
Communication à l'association canadienne française pour l'avancement des sciences.
Annales de l'ACFAS pour l'année 1966-1967, Vol. 34.

[63] TREHEL M.

Catalogues, treillis de catalogues, génération et décomposition.
A paraître dans Mathématiques et Sciences Humaines, n° 40, 1972.

[64] VEILLON G.

Introduction à la théorie des catalogues.
Document G 2100 B, C.E.T.A. Grenoble, Janvier 1965.

[65] ZIDANI J.

Structuration de l'ensemble des sous-espaces d'un espace par une relation.
R.I.R.O. 4ème année, R-3 (1970), pp. 83-89.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le

le Président de la thèse

VU, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

le Président de l'Université
Scientifique et Médicale